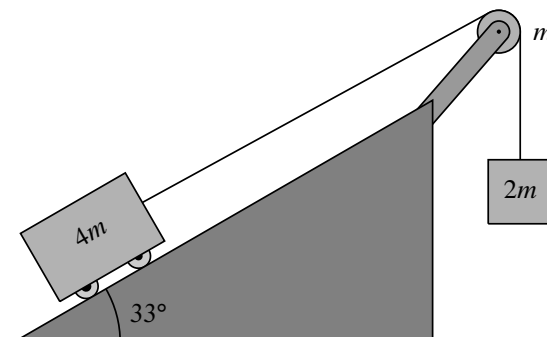


Nome: _____

Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador. O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros! Use $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

1. (4 valores) Um bloco de massa $2m$ está pendurado por um fio vertical que está ligado no outro extremo a um carrinho de massa $4m$, passando por uma roldana de massa m , onde $m = 100 \text{ g}$. O carrinho encontra-se na superfície de um plano inclinado 33° em relação à horizontal e a roldana é um disco homogêneo de raio R (momento de inércia $I_{cm} = m R^2/2$). A massa do fio e das rodas do carrinho são desprezáveis. O fio faz rodar a roldana, sem deslizar sobre ela. Determine o valor da aceleração do carrinho, ignorando as forças não conservativas (resistência do ar e atrito nos eixos das rodas e da roldana) e o sentido dessa aceleração (para cima ou para baixo do plano inclinado?).



2. (4 valores) Determine a posição dos pontos de equilíbrio e o tipo de cada um desses pontos, no sistema dinâmico com as seguintes equações de evolução:

$$\dot{x} = y^3 - 4x \quad \dot{y} = y^3 - y - 3x$$

Diga se o sistema corresponde ou não às seguintes categorias de sistemas: (a) autónomo, (b) linear, (c) conservativo, (d) pedador presa (todas as suas respostas devem ser argumentadas corretamente).

PERGUNTAS. Respostas certas, 0.8 valores, erradas, -0.2, em branco, 0.

3. O sistema de Lotka-Volterra consegue explicar muito bem a evolução de um sistema predador presa mas tem uma grande desvantagem que outros sistemas tentam corrigir. Qual é essa desvantagem?
- (A) Cada uma das populações pode aumentar indefinidamente.
 (B) Nenhuma das duas populações atinge nunca um valor constante.
 (C) Nenhuma das duas populações pode chegar a extinguir-se totalmente.
 (D) Cada uma das populações oscila indefinidamente.
 (E) Cada uma das populações pode oscilar entre um valor muito baixo e um valor muito elevado.

Resposta:

4. Determine o valor da componente normal da aceleração dum ponto, no instante em que o seu vetor velocidade é $3\hat{i} + 6\hat{j}$ e o vetor aceleração é $-5\hat{i} + 6\hat{j}$ (unidades SI).

- (A) 7.6 m/s^2 (C) 21.0 m/s^2 (E) 48.0 m/s^2
 (B) 3.13 m/s^2 (D) 7.16 m/s^2

Resposta:

5. As equações dum sistema dinâmico com variáveis de estado (x, y) foram transformadas para coordenadas polares (r, θ) , obtendo-se as equações: $\dot{\theta} = -2$ $\dot{r} = 3r - r^2$
 Como tal, conclui-se que o sistema tem um ciclo limite:

- (A) atrativo com $r = 2$ (D) atrativo com $r = 3$
 (B) repulsivo com $r = 2$ (E) repulsivo com $r = 3$
 (C) atrativo com $r = 0$

Resposta:

6. Um corpo de 18 kg desloca-se ao longo do eixo dos x . A força resultante sobre o corpo é conservativa, com energia potencial dada pela expressão $3 + 5x^2$ (SI). Se o corpo passa pela origem com velocidade $9\hat{i}$, com que energia cinética chegará ao ponto $x = 7 \text{ m}$?

- (A) 2420.0 J (C) 145.2 J (E) 4114.0 J
 (B) 1210.0 J (D) 484.0 J

Resposta:

7. Aplica-se uma força $5\hat{i} + 4\hat{j}$ num ponto com vetor posição $4\hat{i} - 1\hat{j}$ (unidades SI). Determine o módulo do momento dessa força, em relação à origem.

- (A) $33 \text{ N}\cdot\text{m}$ (C) $16 \text{ N}\cdot\text{m}$ (E) $11 \text{ N}\cdot\text{m}$
 (B) $21 \text{ N}\cdot\text{m}$ (D) $24 \text{ N}\cdot\text{m}$

Resposta:

8. A matriz dum sistema dinâmico linear é (unidades SI):

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

Como é a evolução das variáveis de estado em função do tempo?

- (A) Oscilam com período π e amplitude decrescente.
 (B) Oscilam com período igual a π e amplitude constante.
 (C) Oscilam com período $\pi/2$ e amplitude constante.
 (D) Oscilam com período $\pi/2$ e amplitude decrescente.
 (E) Oscilam com período $\pi/2$ e amplitude crescente.

Resposta:

9. Uma partícula desloca-se numa trajetória circular sob a ação duma força tangencial resultante $F_t = 3 \cos(\theta)$, onde θ é o ângulo medido ao longo do círculo. Qual dos valores de θ na lista seguinte corresponde a um ponto de equilíbrio instável?

- (A) $\pi/2$ (C) 0 (E) $3\pi/2$
 (B) 2π (D) π

Resposta:

10. A projeção x da aceleração duma partícula aumenta em função do tempo, de acordo com a expressão $a_x = 3t$ (unidades SI). No instante $t = 0$ a projeção x da velocidade é nula e a componente da posição é $x = 4$ m. Determine a projeção x da posição em $t = 6$ s.

- (A) 112.0 m (C) 56.0 m (E) 336.0 m
 (B) 694.4 m (D) 280.0 m

Resposta:

11. Uma partícula de massa m desloca-se ao longo da curva $y = x^2/2$, no plano horizontal xy . Assim sendo, basta uma única variável generalizada para descrever o movimento; escolhendo a variável x , a expressão da energia cinética é $E_c = \frac{m\dot{x}^2}{2}(1+x^2)$. Encontre a expressão para a força generalizada Q_x responsável pelo movimento da partícula.

- (A) $m\ddot{x}(1+x^2) + 2mx\dot{x}$
 (B) $\frac{m\ddot{x}}{2}(1+x^2) + 1mx\dot{x}^2$
 (C) $\frac{m\ddot{x}}{2}(1+x^2) - 2mx^3\dot{x}^2$
 (D) $\frac{m\ddot{x}}{2}(1+x^2) - 2mx\dot{x}$
 (E) $m\ddot{x}(1+x^2) + 1mx\dot{x}^2$

Resposta:

12. O vetor velocidade do objeto 1, em função do tempo, é: $\vec{v}_1 = (1 - 6t)\hat{i} + 8t\hat{j}$ (unidades SI) e o vetor velocidade do objeto 2, no mesmo referencial, é: $\vec{v}_2 = 3t\hat{i} + (1 - 5t)\hat{j}$. Determine o vetor aceleração do objeto 1 em relação ao objeto 2.

- (A) $3\hat{i} + 3\hat{j}$ (D) $9\hat{i} + 3\hat{j}$
 (B) $9\hat{i} - 3\hat{j}$ (E) $-3\hat{i} + 13\hat{j}$
 (C) $-9\hat{i} + 13\hat{j}$

Resposta:

13. Se $x \geq 0$ e $y \geq 0$, qual dos seguintes sistemas é um sistema de duas espécies com competição?

- (A) $\dot{x} = x^2 + xy$ $\dot{y} = y^2 + xy$
 (B) $\dot{x} = y^2 - xy$ $\dot{y} = x^2 - xy$
 (C) $\dot{x} = x^2 - xy$ $\dot{y} = y^2 - xy$
 (D) $\dot{x} = xy - x^2$ $\dot{y} = y^2 - x^2$
 (E) $\dot{x} = y^2 - xy$ $\dot{y} = x^2 + xy$

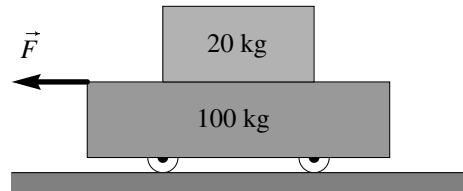
Resposta:

14. O vetor velocidade duma partícula, em função do tempo, é: $2t^2\hat{i} + 2t^3\hat{j}$ (unidades SI). Encontre a expressão para o módulo da aceleração.

- (A) $6t^2$ (D) $\sqrt{36t^4 + 16t^2}$
 (B) $4t$ (E) $6t^2 + 4t$
 (C) $\sqrt{6t^2 + 4t}$

Resposta:

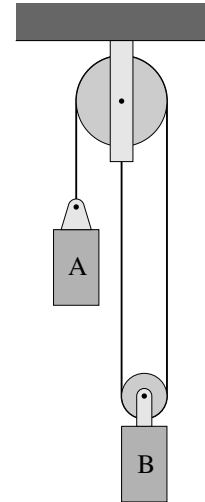
15. A força \vec{F} , com módulo de 54 N, faz acelerar os dois blocos na figura, sobre uma mesa horizontal, sem que o bloco de cima deslize em relação ao outro bloco. As forças de atrito nas rodas podem ser desprezadas. Calcule o módulo da força de atrito entre os dois blocos.



- (A) 8 N (C) 9 N (E) 7 N
 (B) 5 N (D) 6 N

Resposta:

16. Na figura, a roldana fixa tem raio de 6 cm, a roldana móvel tem raio de 3 cm e o fio faz rodar as roldanas sem deslizar sobre elas. No instante em que o bloco A desce, com velocidade de valor 18 cm/s, qual o valor da velocidade angular da roldana móvel?



- (A) 12 rad/s (C) 6 rad/s (E) 3 rad/s
 (B) 18 rad/s (D) 9 rad/s

Resposta:

17. A equação diferencial:

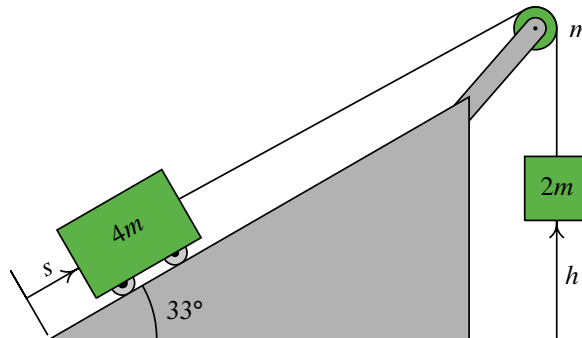
$$\ddot{x} - x^2 + x + 6 = 0$$

é equivalente a um sistema dinâmico com espaço de fase (x, \dot{x}) . Qual dos pontos na lista é ponto de equilíbrio desse sistema?

- (A) $(-3, 0)$ (C) $(1, 0)$ (E) $(0, 0)$
 (B) $(-1, 0)$ (D) $(3, 0)$

Resposta:

Problema 1. Para descrever o movimento do sistema são necessárias três variáveis. Duas variáveis s e h , para determinar as posições do carrinho e do bloco, que podem ser definidas como mostra a figura seguinte, e um ângulo θ que determina a rotação da roldana.



Como o fio faz rodar a roldana sem deslizar nela, o ângulo que a roldana roda (no sentido dos ponteiros do relógio) está relacionado com a posição do carrinho: $\theta = s/R + \text{constante}$ e, como tal, a velocidade angular da roldana é:

$$\omega = \frac{v}{R}$$

onde $v = \dot{s}$ é a velocidade do carrinho. O comprimento do fio é igual a

$$L = \text{constante} - s - h$$

e, como permanece constante, a velocidade do bloco é igual a menos a velocidade do carrinho:

$$\dot{h} = -v$$

Assim sendo, o sistema tem um único grau de liberdade, s , e uma única velocidade generalizada, v .

Resolução por mecânica de Lagrange. A expressão da energia cinética total dos três objetos é:

$$E_c = \frac{1}{2}(4m)\dot{s}^2 + \frac{1}{2}(2m)\dot{h}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{mR^2}{2}\right)\omega^2 = 2m\dot{s}^2 + m\dot{s}^2 + \frac{1}{4}m\dot{s}^2 = \frac{13}{4}m\dot{s}^2$$

E a expressão da energia potencial gravítica (ignorando a da roldana que permanece constante) é:

$$U = 4mgs \sin(33^\circ) + 2mgh = 4mgs \sin(33^\circ) - 2mgs + \text{constante}$$

A equação de movimento obtém-se a partir da equação de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial v}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial s} = \frac{13}{2}ma + 4mg \sin(33^\circ) - 2mg = 0$$

E a aceleração do carrinho é então,

$$a = \frac{4g}{13}(1 - 2 \sin(33^\circ)) = -0.2692 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

O sinal negativo indica que a aceleração é para baixo do plano inclinado (a velocidade do carrinho, v , é uma variável de estado que pode ser positiva ou negativa, ou seja, para cima ou para baixo).

Resolução por mecânica vetorial. A figura ao lado mostra o diagrama de corpo livre do carrinho. A soma das componentes das forças normais ao plano deve ser nula e a soma das componentes das forças tangentes ao plano é igual a:

$$T_1 - 4mg \sin(33^\circ) = 4ma \implies T_1 = 4m(a + g \sin(33^\circ)) \quad (1)$$

A figura ao lado mostra o diagrama de corpo livre do bloco. Como na equação do carrinho admitiu-se que a aceleração a era para cima do plano, então a aceleração do bloco é a , para baixo, e a equação de movimento é:

$$2mg - T_2 = 2ma \implies T_2 = 2m(g - a) \quad (2)$$

Na roldana atuam as tensões nos dois lados do fio, o seu peso e uma força de contato no eixo (diagrama ao lado). A soma dessas forças deve ser nula e a soma dos momentos, em relação ao eixo, é:

$$T_2 R - T_1 R = \left(\frac{mR^2}{2} \right) \alpha \implies T_2 - T_1 = \frac{m}{2} a$$

Substituindo nesta expressão as equações (1) e (2), obtém-se a mesma expressão da aceleração obtida pelo método de mecânica de Lagrange.

Problema 2. Os pontos de equilíbrio são as soluções das duas equações:

$$y^3 - 4x = 0 \quad y^3 - y - 3x = 0$$

Subtraindo as duas equações obtém-se $y = x$, ou seja,

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x+2)(x-2) = 0$$

Como tal, há três pontos de equilíbrio (x, y) :

$$P_1 = (0,0) \quad P_2 = (2,2) \quad P_3 = (-2,-2)$$

Derivando as duas expressões das equações de evolução, obtém-se a matriz jacobiana:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -4 & 3y^2 \\ -3 & 3y^2 - 1 \end{bmatrix}$$

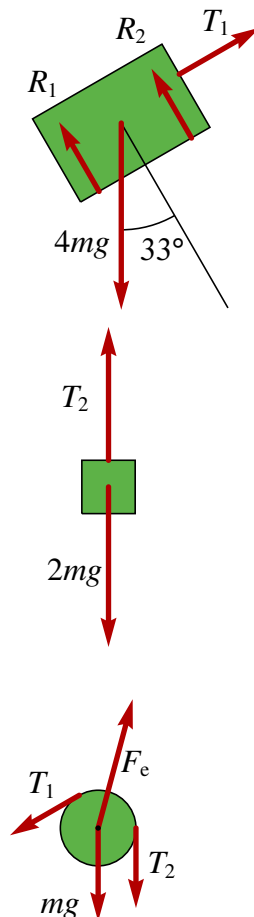
No ponto P_1 , a matriz da aproximação linear é então,

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

que tem valores próprios -4 e -1 e, como tal, P_1 é um nó repulsivo.

Nos pontos P_2 e P_3 obtém-se a mesma matriz para a aproximação linear,

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ -3 & 11 \end{bmatrix}$$



Que tem determinante igual a -8 . Conclui-se então que P_2 e P_3 são ambos pontos de sela.

(a) O sistema é autónomo, porque as expressões das equações de evolução não dependem explicitamente do tempo. (b) Não é um sistema linear, porque a matriz jacobiana não é constante. (c) Não é sistema conservativo, porque o traço da matriz jacobiana, igual a $3y^2 - 5$, não é nulo. (d) Não pode ser sistema predador presa, porque não é um sistema de duas espécies, já que $y^3 - 4x$ não se aproxima de zero quando x se aproxima de zero e $y^3 - y - 3x$ não se aproxima de zero quando y se aproxima de zero.

Perguntas

- | | | | | |
|------|------|-------|-------|-------|
| 3. E | 6. D | 9. E | 12. C | 15. C |
| 4. D | 7. B | 10. A | 13. C | 16. E |
| 5. D | 8. C | 11. E | 14. D | 17. D |

Critérios de avaliação

Problema 1

Mecânica de Lagrange.

- Determinação do grau de liberdade e relações entre as velocidades e acelerações0.8
- Expressão para a energia cinética do sistema0.8
- Expressão para a energia potencial do sistema0.8
- Aplicação da equação de Lagrange para obter a equação de movimento0.8
- Valor da aceleração do carrinho, com unidades corretas0.4
- Indicação do sentido da aceleração do carrinho0.4

Mecânica vetorial.

- Determinação do grau de liberdade e relações entre as velocidades e acelerações0.8
- Diagrama de corpo livre e equação de movimento do carrinho0.8
- Diagrama de corpo livre e equação de movimento do bloco0.8
- Diagrama de corpo livre e equação de movimento da roldana0.8
- Valor da aceleração do carrinho, com unidades corretas0.4
- Indicação do sentido da aceleração do carrinho0.4

Problema 2

- Determinação dos 3 pontos de equilíbrio0.4
- Obtenção da matriz jacobiana0.4
- Caracterização do ponto de equilíbrio na origem0.4
- Caracterização dos dois pontos de equilíbrio fora da origem0.4
- Alínea *a*0.6
- Alínea *b*0.6
- Alínea *c*0.6
- Alínea *d*0.6