

## 5. Dinâmica dos corpos rígidos

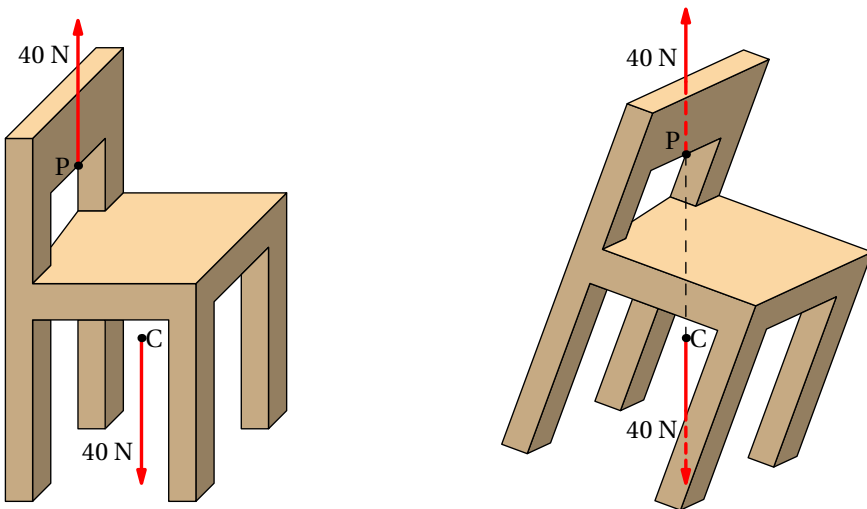


Para conseguir dar uma curva com uma bicicleta ou uma moto, é necessário que exista suficiente atrito entre os pneus e a estrada, porque a força de atrito deverá ser igual à massa vezes a aceleração centrípeta. Como a força de atrito atua na superfície dos pneus, se o condutor não se inclinasse, a lei da inércia implicava que a sua tendência fosse continuar numa trajetória retilínea, contrariando a trajetória circular da superfície dos pneus produzindo desequilíbrio. Nas corridas de motos, as velocidades elevadas implicam ângulos de inclinação maiores; para conseguir inclinar mais a moto, o condutor vira inicialmente o volante no sentido oposto ao sentido em que vai tomar a curva e sai para o lado em que a moto se inclina para contrariar a tendência da moto cair para o lado oposto.

## 5.1. Vetores deslizantes

Os vetores introduzidos no capítulo 2 são vetores livres, que são considerados iguais se tiverem o mesmo módulo, direção e sentido, independentemente do ponto do espaço onde se encontrem. No caso das forças, não basta saber o módulo, direção e sentido. Por exemplo, quando se aplica uma força numa porta para fechá-la, para além do módulo, direção e sentido da força, será também importante o ponto em que essa força for aplicada. Quanto mais longe das dobradiças for aplicada a força, mais fácil será fechar a porta; a força necessária para fechar a porta será muito elevada se for aplicada num ponto muito próximo de uma das dobradiças.

Imagine que para movermos uma cadeira para outro sítio, levantamo-la com uma mão. Se o peso da cadeira for 40 N, e o seu centro de gravidade for o ponto C indicado na figura 5.1, poderíamos apoiar a nossa mão num ponto P no espaldar da cadeira e aplicar uma força vertical ligeiramente superior a 40 N para levantá-la. Enquanto a cadeira começa a subir, rodará até ficar na posição de equilíbrio, como no lado direito da figura 5.1, em que o peso e a força aplicada pela mão encontram-se na mesma reta vertical. Se pudéssemos aplicar a força para cima num ponto da cadeira que estivesse na mesma vertical em que o ponto C estava inicialmente, a cadeira começaria a subir sem rodar.

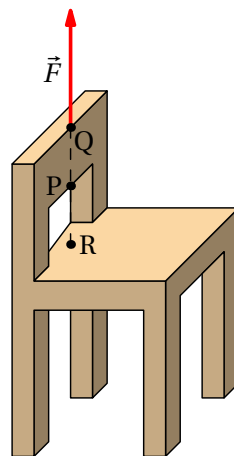


**Figura 5.1.:** Cadeira com peso de 40 N a ser levantada com uma força para cima.

Podemos concluir que para prever o efeito que produzirá uma força, será necessário saber o seu módulo, direção, sentido e também a sua **linha de ação**, que é a linha reta na mesma direção da força, que passa pelo ponto onde a força é aplicada. Uma força produz efeitos diferentes se for aplicada em linhas de ação diferentes, embora o seu módulo, direção e sentido continuem iguais.

Este tipo de vetores, caracterizados por uma linha de ação específica, chamam-se **vetores deslizantes**. O ponto exato onde forem aplicadas não é importante, sempre que esse ponto esteja na sua linha de ação. No exemplo da cadeira a ser levantada, a mesma força  $\vec{F}$  para cima podia ter sido aplicada nos pontos Q ou R na figura 5.2, que estão na mesma linha vertical com o ponto P, e o efeito teria sido o mesmo. A cadeira rodaria na mesma direção e com a mesma aceleração angular. Como tal, é equivalente admitir que  $\vec{F}$  é aplicada em P, Q, R, ou qualquer outro ponto na sua linha de ação. Contudo, a pesar do efeito inicial ser o mesmo, uma vez a cadeira começa a rodar, os pontos P, Q e R deixam de estar na mesma linha vertical. A vertical que passa por Q ficará mais próxima do centro de gravidade do que a vertical que passa por R. Como tal, a cadeira oscilará mais antes de ficar em equilíbrio, quando a força for aplicada em R, do que quando é aplicada em Q.

Sempre que foi necessário somar forças no capítulo 4, admitimos que podiam ser deslocadas livremente e somadas como vetores livres, usando a regra do paralelogramo. Nas próximas seções mostra-se que essa soma de forças como se fossem vetores livres não está errada, sempre e quando seja adicionado também o efeito de rotação introduzido quando se desloca uma força para uma linha de ação diferente. A aceleração no movimento de translação de um corpo rígido é devida à força resultante que pode ser obtida somando as forças externas como vetores livres. A aceleração angular no movimento de rotação é devida a que as linhas de ação das forças externas não passam pelo centro de massa.



**Figura 5.2.:** Três pontos equivalentes.

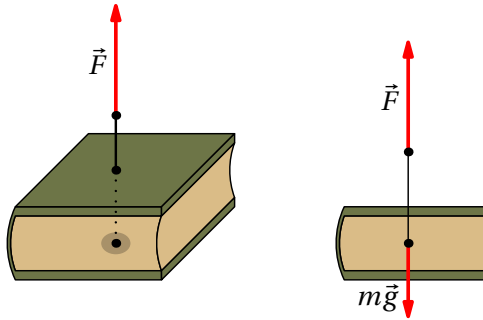


Figura 5.3.: Forças colineares.

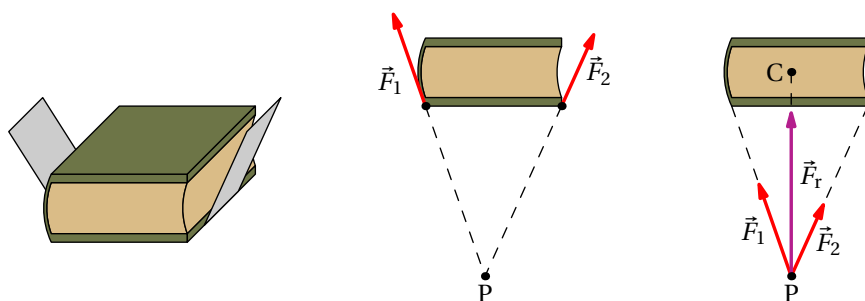
## 5.2. Sobreposição de forças

Para determinar como somar forças e, em geral, vetores deslizantes, consideremos primeiro o caso mais simples, quando as forças a serem somadas estão na mesma linha de ação. Por exemplo, se pretendermos levantar um livro que está em repouso sobre uma mesa horizontal, como na figura 5.3, para aplicar uma força oposta ao peso, e na mesma linha de ação, podíamos fazer um furo vertical no livro, passando pelo centro de gravidade, e passar uma corda pelo furo, segurando-a na base com uma anilha.

Quando puxarmos a corda para cima, com uma força  $\vec{F}$ , essa força será **colinear** com o peso, isto é, as duas forças têm a mesma linha de ação, o que permite que sejam deslocadas para um ponto comum nessa linha de ação e somadas como vetores livres. Se  $|\vec{F}|$  for maior que  $mg$ , o livro subirá na vertical, com movimento uniformemente acelerado e sem rotação; após ter ganho alguma velocidade, reduzimos o módulo da força  $\vec{F}$ , fazendo com que fique igual a  $mg$ , para que o livro continue a subir com velocidade constante. Quando o livro estiver próximo da altura à qual o queremos subir, reduzimos o módulo da força  $\vec{F}$  novamente, de forma que a aceleração vertical seja negativa, até o livro parar; uma vez para, voltamos a aumentar ligeiramente a força, ficando igual a  $mg$ , para que o livro permaneça em repouso pendurado da corda. Estamos tão habituados a seguir esse procedimento, que nem damos conta dele. Mas se fossemos programar um braço robótico para repetir o processo, teríamos de seguir todos esses passos.

Para não termos de furar o livro, para o levantar sem que rode, podíamos passar uma folha de papel por debaixo, como no lado esquerdo da

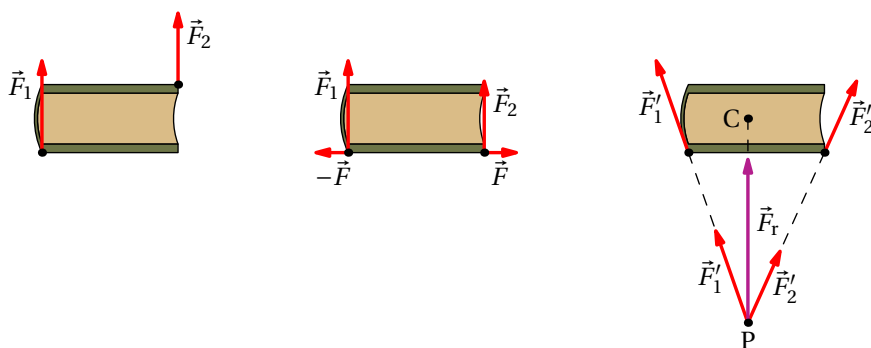
figura 5.4, e puxar nos dois lados da folha de papel, de forma que o livro permaneça horizontal enquanto sobe. Estaremos então a aplicar duas forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ , representadas na parte central da figura 5.4



**Figura 5.4.:** Sobreposição de forças concorrentes.

Essas duas forças chamam-se **concorrentes**, porque as suas linhas de ação são diferentes mas cruzam-se um ponto comum P. Podemos então deslocar cada uma das forças na sua linha de ação até o ponto comum P, e somá-las nesse ponto como vetores livres, produzindo a força resultante  $\vec{F}_r$  no lado direito da figura 5.4. Observe-se que, se o livro é levantado mantendo sempre a sua orientação horizontal, não roda e a força resultante  $\vec{F}_r$  será colinear com o peso  $m\vec{g}$ . Ou seja, na figura 5.4 o ponto P e o centro de gravidade, C, do livro deverão estar na mesma linha vertical; os módulos e as direções de  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  deverão ter as relações necessárias para que isso aconteça.

Quando as linhas de ação de duas forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  são paralelas, como é o caso no lado esquerdo da figura 5.5, podemos usar o seguinte procedi-



**Figura 5.5.:** Sobreposição de forças paralelas.

mento para obter a sua resultante  $\vec{F}_r$ : começa-se por deslocar as forças, nas suas linhas de ação, até ficarem em pontos que estejam na mesma linha perpendicular a essas linhas. A seguir, aplicam-se duas forças  $\vec{F}$  e  $-\vec{F}$ , nos dois pontos onde estão a ser aplicadas  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ , como mostra a parte central da figura 5.5; a introdução dessas duas forças não altera o sistema de forças, porque as duas forças  $\vec{F}$  e  $-\vec{F}$  são colineares e a sua resultante é nula. As forças  $\vec{F}_1$  e  $-\vec{F}$ , aplicadas no mesmo ponto somam-se produzindo a força  $\vec{F}'_1$  no mesmo ponto; de forma análoga,  $\vec{F}_2$  e  $\vec{F}$  somam-se produzindo a força  $\vec{F}'_2$ . As duas forças  $\vec{F}'_1$  e  $\vec{F}'_2$  são concorrentes, e a sua resultante obtém-se pelo procedimento usado para forças concorrentes (lado direito da figura 5.5).

Observe-se que a força resultante,  $\vec{F}_r$ , tem a mesma direção e sentido das duas forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  e o seu módulo é igual à soma dos módulos de  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ , já que, a soma dos vetores livres  $\vec{F}'_1$  e  $\vec{F}'_2$  no ponto P, é igual à soma de  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ , como se fossem vetores livres:

$$\vec{F}_r = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 = (\vec{F}_1 - \vec{F}) + (\vec{F}_2 + \vec{F}) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (5.1)$$

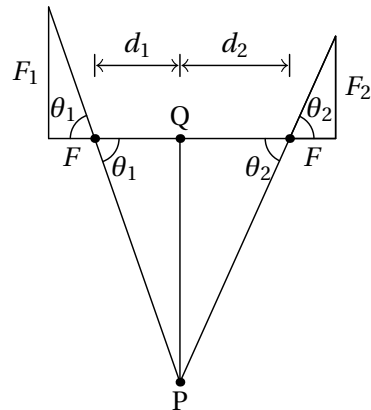
Se  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  tivessem sentidos opostos, a resultante será então no sentido da força que tiver maior módulo e o módulo da resultante seria o módulo da maior menos o módulo da menor.

A linha de ação da resultante  $\vec{F}_r$  será outra reta paralela, mas diferente, às linhas de ação de  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ . Para determinar as distâncias  $d_1$  e  $d_2$ , desde a linha de ação da resultante até às linhas de ação das forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ , observa-se (figura 5.6) que a distância entre o ponto comum de  $\vec{F}'_1$  e  $\vec{F}'_2$ , P, e o ponto Q, onde a linha de ação da resultante cruza a reta que passa pelos pontos de aplicação de  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ , é igual a:

$$\overline{PQ} = d_1 \tan \theta_1 = d_2 \tan \theta_2 \quad (5.2)$$

onde  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são os ângulos entre as forças  $\vec{F}'_1$  e  $\vec{F}'_2$  e a perpendicular às suas linhas de ação. Como  $\vec{F}'_1$  é a soma de duas forças perpendiculares,  $\vec{F}_1$  e  $-\vec{F}$ , e  $\vec{F}'_2$  é também a soma de duas forças perpendiculares,  $\vec{F}_2$  e  $\vec{F}$ , as tangentes dos dois ângulos são:

$$\tan \theta_1 = \frac{F_1}{F} \quad \tan \theta_2 = \frac{F_2}{F} \quad (5.3)$$



**Figura 5.6.:** Linha de ação da resultante.

e, substituindo essas expressões na equação 5.2, obtém-se um resultado chamado **lei das alavancas**:

$$F_1 d_1 = F_2 d_2 \quad (5.4)$$

Resumindo, para levantar o livro por meio de duas forças verticais, sem que o livro rode, será necessário que a relação entre os módulos dessas duas forças,  $F_1/F_2$ , seja o inverso da relação entre as distâncias das suas linhas de ação até o centro de gravidade,  $d_2/d_1$ .

### 5.3. Momentos e binários

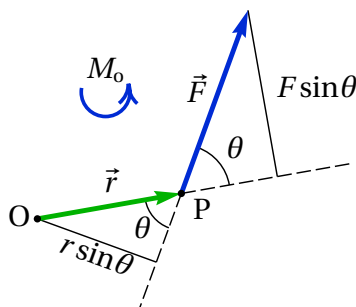
A regra das alavancas pode ser explicada introduzindo o conceito de **momento** de uma força, em relação a um ponto. Define-se o momento de uma força  $\vec{F}$ , em relação a um ponto O, igual ao produto do módulo da força vezes a distância  $d$  que há entre o ponto O e a linha de ação da força:

$$M_o = F d \quad (5.5)$$

A distância  $d$  chama-se **braço** da força, em relação ao ponto O e o momento  $M_o$  também costuma chamar-se torque.

Se  $\vec{r}$  for o vetor posição, desde o ponto O até o ponto P onde a força  $\vec{F}$  é aplicada, o braço da força em relação a O será igual a  $r \sin \theta$ , em que o ângulo  $\theta$  é o ângulo entre os vetores  $\vec{r}$  e  $\vec{F}$  (figura 5.7). Conclui-se que o momento da força em relação ao ponto O é igual a,

$$M_o = F r \sin \theta \quad (5.6)$$



**Figura 5.7.:** Momento de uma força.

O momento  $M_o$  mede o efeito de rotação produzido pela força, se no ponto O houvesse um eixo fixo, perpendicular ao plano formado por  $\vec{r}$  e  $\vec{F}$ , podendo o corpo rodar à volta desse eixo (se o ponto O estiver fora do corpo, pode imaginar-se uma barra rígida ligada ao corpo, que se estende até O). Quanto mais afastada estiver a linha de ação da força do ponto O, maior será o momento da força. Isso explica porquê é mais

fácil fechar a porta quanto mais longe das dobradiças for aplicada a força. Se o ponto O estiver na linha de ação da força,  $d$  será 0, os vetores  $\vec{r}$  e  $\vec{F}$  não definirão nenhum plano, e o momento da força será nulo.

Na figura 5.7, observe-se que  $F \sin \theta$  é a componente da força na direção perpendicular ao vetor posição  $\vec{r}$ , ou seja, o momento da força é também igual ao produto da distância desde a origem até o ponto onde atua,  $r$ , vezes a componente da força perpendicular à reta que passa por O e pelo ponto onde a força é aplicada.

A equação 5.6 mostra que o momento da força é igual ao módulo do produto vetorial entre o vetor posição e a força. Como tal, é conveniente definir o **vetor momento** da força  $\vec{F}$ , em relação ao ponto O,

$$\boxed{\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}} \quad (5.7)$$

O momento é uma tendência a rodar em torno de um eixo na direção do vector  $\vec{M}_O$ , ou seja, num plano de rotação perpendicular a  $\vec{M}_O$  e no sentido da regra da mão direita: se o eixo dos  $z$  for escolhido na direção e sentido de  $\vec{M}_O$ , a rotação será no sentido do semieixo positivo dos  $x$  para o semieixo positivo dos  $y$ . Na figura 5.7 o momento é um vetor que aponta para fora da imagem e foi representado por um arco circular com uma seta a apontar no sentido da rotação.

O método descrito para somar forças paralelas falhará no caso em que as duas forças formam um **binário**, que são duas forças paralelas com o mesmo módulo mas em sentidos opostos, como na figura 5.8. Nesse caso, as forças  $\vec{F}'_1$  e  $\vec{F}'_2$  não serão concorrentes e não podem ser deslocadas para um ponto comum. No entanto, a equação 5.1 indica que a resultante será nula. O binário não produz nenhuma translação em nenhum sentido, mas apenas rotação. O momento total, em relação à origem O, é a soma dos momentos das duas forças,

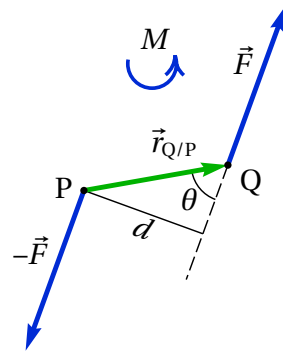


Figura 5.8.: Binário.

$$\vec{r}_Q \times \vec{F} - \vec{r}_P \times \vec{F} = (\vec{r}_Q - \vec{r}_P) \times \vec{F} \quad (5.8)$$

Os dois vetores posição dos pontos Q e P dependem de onde estiver a



origem O, mas a sua diferença é a posição relativa  $\vec{r}_{Q/P}$  na figura, que não depende do ponto onde estiver a origem.

Isso quer dizer que o binário produz um momento que não depende de nenhum ponto de referência,

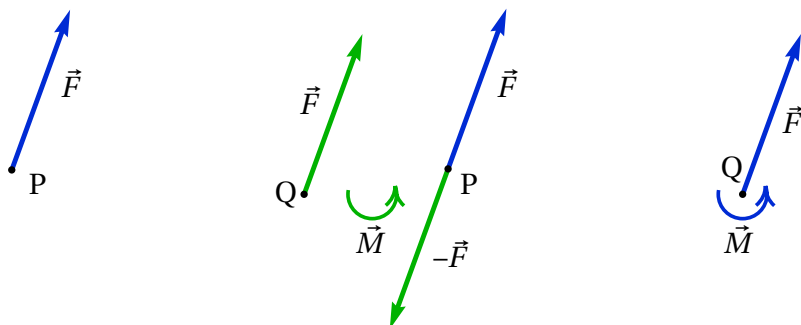
$$\vec{M} = \vec{r}_{Q/P} \times \vec{F} \quad (5.9)$$

Na figura 5.8 o vetor momento do binário aponta para fora da figura, e foi representado por um arco circular com uma seta, no sentido anti-horário.

Uma força  $\vec{F}$  aplicada num ponto P pode ser deslocada para outro ponto Q, fora da sua linha de ação, usando o procedimento ilustrado na figura 5.9. Adicionam-se duas forças  $-\vec{F}$  e  $\vec{F}$  nos pontos P e Q, que acrescentam um momento que chamaremos  $-\vec{M}$  (no sentido dos ponteiros do relógio na figura); para não alterar nada, adiciona-se também um binário  $\vec{M}$  (no sentido contrário aos ponteiros do relógio) que anula o binário  $-\vec{M}$ . No ponto P ficam duas forças iguais e opostas que se anulam; o sistema resultante é então a mesma força inicial  $\vec{F}$ , mas aplicada no ponto Q, e o binário  $\vec{M}$ :

$$\vec{M} = \vec{r}_{P/Q} \times \vec{F} \quad (5.10)$$

que é igual ao momento  $\vec{M}_Q$  que a força original, em P, produz em relação ao ponto Q para onde foi deslocada.



**Figura 5.9.:** Procedimento para deslocar uma força de um ponto P para outro ponto Q.

Conclui-se então que a resultante de um conjunto de forças será a soma delas como vetores livres e pode colocar-se em qualquer ponto Q, sempre

e quando seja acrescentado também um binário que é igual à soma dos momentos de todas as forças em relação a Q.

Quando as direções de todas as forças estiverem num mesmo plano, será conveniente definir dois dos eixos coordenados nesse plano, por exemplo  $x$  e  $y$ , e a origem no ponto onde vão ser somadas as forças. Como tal, o momento de cada força  $\vec{F}_n$  em relação à origem tem unicamente componente segundo  $z$ , igual ao determinante:

$$M_n = \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ F_{x,n} & F_{y,n} \end{vmatrix} \quad (5.11)$$

em que  $x_n$  e  $y_n$  são as coordenadas do ponto onde atua a força  $\vec{F}_n = F_{n,x} \hat{i} + F_{n,y} \hat{j}$ . Se houver  $p$  forças externas, todas no plano  $xy$ , a força e binário resultantes na origem O são:

$$\vec{F}_r = \left( \sum_{n=1}^p F_{n,x} \right) \hat{i} + \left( \sum_{n=1}^p F_{n,y} \right) \hat{j} \quad \vec{M}_r = \left( \sum_{n=1}^p \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ F_{x,n} & F_{y,n} \end{vmatrix} \right) \hat{k} \quad (5.12)$$

O binário resultante pode ser eliminado, deslocando a força resultante para um ponto a uma distância  $M_r / F_r$  da linha que passa pela origem, paralela a  $\vec{F}_r$ .

Quando as linhas de ação das forças não estão num mesmo plano, o binário resultante  $\vec{M}_r$  terá também uma componente paralela à força resultante  $\vec{F}_r$ . A componente de  $\vec{M}_r$  perpendicular a  $\vec{F}_r$  pode ser eliminada, deslocando a força, ficando força e momento resultantes paralelos.

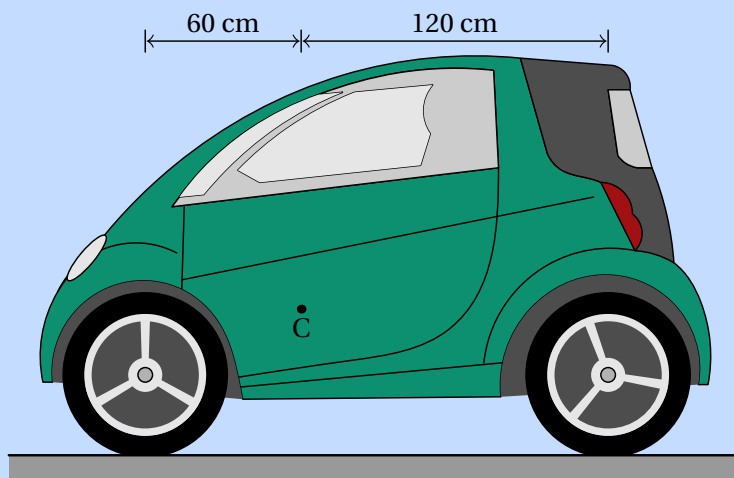
## 5.4. Equilíbrio dos corpos rígidos

Se a força resultante  $\vec{F}_r$  de todas as forças externas atuando num corpo rígido for nula, e se o momento resultante dessas forças,  $\vec{M}_r$ , for também nulo em relação a um ponto, então  $\vec{M}_r$  será também nulo em qualquer outro ponto, já que o deslocamento da força resultante (nula) não introduz nenhum binário. Nesse caso, as forças externas não produzem nenhum efeito de aceleração linear nem angular e o corpo rígido encontra-se em equilíbrio: ou em repouso, ou com velocidade (linear e/ou angular) constante.

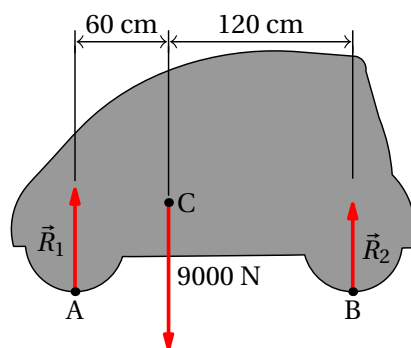
Como tal, as condições de equilíbrio de um corpo rígido é que a soma das forças externas, como vetores livres, seja nula e que a soma dos momentos de todas as forças externas, em relação a qualquer ponto, seja nula.

**Exemplo 5.1**

O automóvel na figura, com peso de 9000 N, encontra-se em repouso numa estrada horizontal. O centro de gravidade,  $C$ , do automóvel encontra-se 60 cm detrás do eixo das rodas da frente e 120 cm à frente do eixo das rodas de atrás. Determine a força de reação normal em cada pneu.



**Resolução.** O automóvel encontra-se em equilíbrio. A figura à direita mostra o diagrama de corpo livre.  $R_1$  é a soma das reações normais nos dois pneus da frente e  $R_2$  é a soma das reações normais nos pneus de atrás (admitindo que os lados esquerdo e direito sejam simétricos, essas forças estarão aplicadas ao meio de cada um dos eixos). Se houver forças de atrito nos pneus, o único que podemos concluir é que a soma delas deverá ser nula; o cálculo dessas forças implica conhecer melhor a estrutura do carro e a sua deformação devida ao seu peso; admitiremos que o carro é perfeitamente rígido, sem sofrer deformações e, como tal, não há forças de atrito.



A condição de equilíbrio para que a força resultante seja nula é:

$$R_1 + R_2 = 9000$$

Para encontrar o valor dessas duas forças há que considerar também a condição de que a soma dos momentos, das 3 forças externas, é nula, em relação a qualquer ponto. A soma dos momentos em relação ao ponto A é:

$$1.8 R_2 - 0.6 \times 9000 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_2 = 3000 \text{ N}$$

A seguir podia substituir-se esse valor na condição para a soma das forças verticais, mas também é possível usar a condição de que a soma dos momentos em relação a B é nula:

$$1.2 \times 9000 - 1.8 R_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_1 = 6000 \text{ N}$$

Admitindo que o centro de gravidade está a igual distância dos pneus direitos e esquerdos, cada uma das reações normais nos pneus da frente será 3000 N e a reação normal em cada pneu de atrás será 1500 N.

Se o automóvel tivesse movimento uniforme, estaria ainda em equilíbrio, mas existiria também a força de resistência do ar, que aponta para a direita e para baixo. A componente horizontal dessa força do ar seria contrariada por forças de atrito entre os pneus e a estrada, com resultante para a esquerda, e a componente vertical seria contrariada por um aumento das reações normais nos pneus. Mas como a resistência do ar e as forças de atrito teriam linhas de ação diferentes, o resultado seria um binário que faz rodar o automóvel no sentido dos ponteiros do relógio; o aumento da reação normal seria maior nos pneus de atrás do que nos da frente. Para poder calcular esse binário seria necessário conhecer o coeficiente aerodinâmico  $C_D$  do automóvel, a velocidade do vento e o ponto de aplicação da resistência do ar, que é uma força distribuída em toda a superfície do automóvel.

## 5.5. Centro de massa

Um corpo rígido é uma distribuição contínua de massa num volume. Se a massa total do corpo for  $m$ , e  $dm$  for a massa infinitesimal que existe em cada ponto do corpo,

$$m = \int dm \quad (5.13)$$

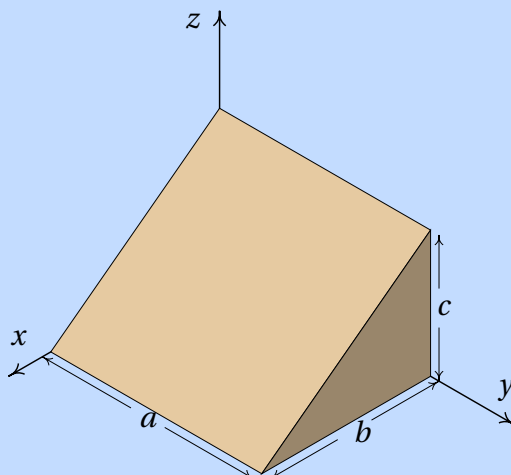
em que o integral é de volume, dentro do volume ocupado pelo sólido, já que  $dm$  é o produto da massa volúmica  $\rho$  pelo volume infinitesimal  $dx dy dz$ .

Define-se o vetor posição do **centro de massa**,  $\vec{r}_{\text{cm}}$ , igual à média, pesada pela massa, do vetor posição no sólido:

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{m} \int \vec{r} dm \quad (5.14)$$

### Exemplo 5.2

Encontre a posição do centro de massa do sólido homogêneo representado na figura.



**Resolução.** O volume do sólido é delimitado pelos 5 planos  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y = a$ ,  $z = 0$  e  $z = c(1 - x/b)$ .

A área infinitesimal  $dm$  é igual à carga volúmica  $\rho$  vezes o volume infinitesimal em coordenadas cartesianas,  $dx dy dz$ . Começa-se por calcular a massa total a partir da equação 5.13:

$$m = \int_0^a \int_0^b \int_0^{c(1-x/b)} \rho dz dx dy$$

Como o corpo é homogêneo,  $\rho$  é constante. No Maxima, os três integrais devem ser calculados de forma sequencial;  $\rho$  representará a massa volúmica

```
(%i1) integrate (p, z, 0, c*(1 - x/b))$
(%i2) integrate (%, x, 0, b)$
(%i3) m: integrate (%, y, 0, a);
(%o3)       $\frac{abc p}{2}$ 
```

Embora os resultados intermédios não tenham sido apresentados, estão armazenados nas variáveis %o1 e %o2.

Para calcular  $\int \vec{r} dm$ , repete-se o mesmo integral de volume, mudando o integrando de  $\rho$ , para  $\rho \vec{r}$

```
(%i4) r: [x, y, z]$
(%i5) integrate (p*r, z, 0, c*(1 - x/b))$
(%i6) integrate (%, x, 0, b)$
(%i7) rcm: integrate (%,y,0,a)/m;
(%o7)       $\left[ \frac{b}{3}, \frac{a}{2}, \frac{c}{3} \right]$ 
```

Conclui-se que o vector posição do centro de massa é:  $\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{b}{3} \hat{i} + \frac{a}{2} \hat{j} + \frac{c}{3} \hat{k}$ .

Em todo corpo rígido existe sempre um único ponto que é o centro de massa. Se a origem for escolhida exatamente no centro de massa, o integral na equação 5.14 será nulo para cada uma das três componentes:

$$\iiint \rho x dx dy dz = \iiint \rho y dx dy dz = \iiint \rho z dx dy dz = 0 \quad (5.15)$$

Os integrais em 5.15 serão todos nulos unicamente se a origem estiver no centro de massa. Este resultado será muito importante mais para a frente.

Derivando os dois lados da equação 5.14 obtém-se a expressão da o velocidade do centro de massa:

$$\boxed{\vec{v}_{\text{cm}} = \frac{1}{m} \int \vec{v} dm} \quad (5.16)$$

Isto é, a velocidade do centro de massa é a média das velocidades de todos as partes do corpo, com pesos iguais às massas das partes.

E derivando a equação 5.16, obtém-se a aceleração do centro de massa,

$$\boxed{\vec{a}_{\text{cm}} = \frac{1}{m} \int \vec{a} \, dm} \quad (5.17)$$

que é a média, pesada pela massa, das acelerações de todas as partes do corpo.

Se o referencial em que é medida a aceleração  $\vec{a}$  de cada ponto for um referencial inercial, o produto  $\vec{a} \, dm$  será igual à força resultante  $d\vec{f}$  que atua sobre a massa  $dm$ :

$$d\vec{f} = \vec{a} \, dm \quad (5.18)$$

Observe-se que sempre que exista aceleração, deverá existir uma força infinitesimal  $d\vec{f}$  aplicada em cada ponto do sólido, para conseguir acompanhar o movimento do corpo, permanecendo rígido. Na maioria dos pontos essa força é devida unicamente às forças internas de contacto entre as partes do corpo, forças essas que são desencadeadas em todo o corpo pela ação de  $n$  forças externas  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  que atuam em  $n$  pontos do corpo rígido. Nos pontos 1, 2,  $\dots$ ,  $n$ , a força  $\vec{f}$  inclui as forças de contacto mais a força externa em cada ponto. A diferencial  $d\vec{f}$  é a variação da força em todos os pontos do volume do corpo.

Substituindo a expressão 5.18 na equação 5.17, conclui-se que,

$$\int d\vec{f} = m \vec{a}_{\text{cm}} \quad (5.19)$$

Na soma das forças em todos os pontos do corpo, por cada força interna de contacto que existir num ponto, existirá outra força igual mas de sentido oposto em outro ponto vizinho, devido à lei de ação e reação. Assim sendo, no integral  $\int d\vec{f}$  todas as forças internas de contacto serão eliminadas, ficando unicamente a soma das forças externas,  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ , que é igual à força resultante sobre o corpo rígido. Como tal, a equação 5.19 é equivalente a,

$$\boxed{\vec{F}_R = m \vec{a}_{\text{cm}}} \quad (5.20)$$

Este resultado importante é a lei do movimento de translação do corpo rígido:

*O movimento do centro de massa de qualquer corpo rígido com massa  $m$  é igual ao movimento que teria uma partícula pontual com massa  $m$  sob a ação de uma força igual à força resultante sobre o corpo rígido.*

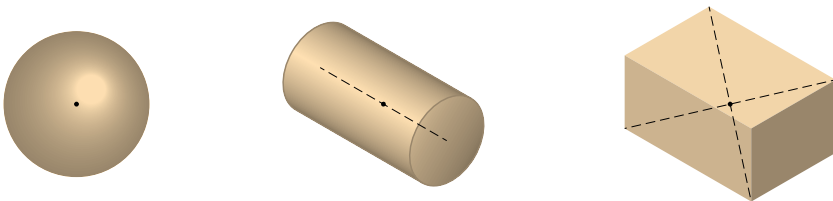
Lembre-se que a soma das forças é feita como se fossem vetores livres. Se a força resultante for nula, o centro de massa estará ou em repouso ou em estado de movimento retilíneo uniforme, mas outros pontos no corpo rígido poderão ter movimentos mais complicados.

O peso é um exemplo de força externa aplicada em todos os pontos do corpo rígido. A equação 5.19 nesse caso dá,

$$\int \vec{g} \, dm = m \vec{a}_{\text{cm}} \quad (5.21)$$

Se a aceleração da gravidade  $\vec{g}$  for igual em todos os pontos do corpo, o integral no lado esquerdo será igual a  $m \vec{g}$  e conclui-se que a aceleração do centro de massa é igual à aceleração da gravidade e que o centro de gravidade — ponto de aplicação da força resultante do peso de todas as partes do corpo — coincide com o centro de massa. Existem casos em que  $\vec{g}$  não é constante em todo o corpo, mas geralmente isso não acontece, sendo possível assumir que o peso total do objeto é a força  $m \vec{g}$  aplicada no centro de massa.

Considere-se, por exemplo, uma lâmina triangular. Pendurando-a por um dos vértices, começará a oscilar até parar numa posição em que o centro de gravidade esteja no mesmo segmento de reta vertical que passa pelo vértice; traçando esse segmento no triângulo e repetindo o procedimento para os outros dois vértices, o ponto onde se cruzam os três segmentos será o centro de gravidade e centro de massa. Se a massa volúmica do triângulo for igual em todos os pontos, cada um dos segmentos verticais será a mediana que divide o triângulo em duas partes com a mesma área e, conseqüentemente, com o mesmo peso. Nos sólidos com formas simétricas e massa volúmica constante, o centro de massa encontra-se no centro geométrico. A figura 5.10 mostra outros três exemplos.



**Figura 5.10.:** Centros de massa de 3 objetos com massa volúmica constante: esfera, cilindro e paralelepípedo.



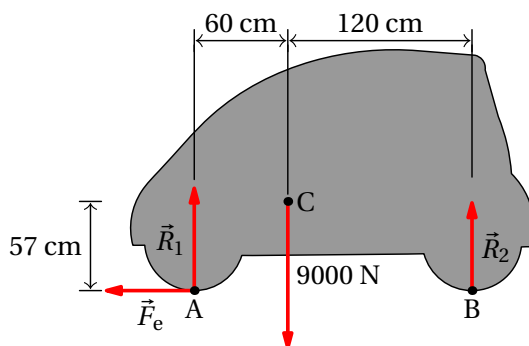
## 5.6. Translação sem rotação

Num corpo rígido com movimento de translação sem rotação, a cada instante a aceleração de todos os pontos é a mesma, igual à aceleração do centro de massa, que é igual à soma das forças externas dividida pela massa do corpo. Como o corpo não roda, a soma dos momentos de todas as forças em relação ao centro de massa deverá ser nula. Há que ter atenção ao facto de que a soma dos momentos é nula unicamente em relação ao centro de massa; em relação a outro ponto P, a soma dos momentos será igual e oposta ao momento da força resultante, que atua no centro de massa, em relação a P.

### Exemplo 5.3

O mesmo automóvel do exemplo 5.1, acelera durante 20 s, com aceleração tangencial constante, desde o repouso até à velocidade de 60 km/h. Sabendo que o centro de gravidade está 57 cm por cima do chão, determine as forças de reação normal em cada pneu, no instante em que começa o seu movimento.

**Resolução.** No momento em que o automóvel começa a andar, a resistência do ar é nula, porque a velocidade também é nula. Como tal, as únicas forças horizontais que podem ser responsáveis pela aceleração são as forças de atrito estático,  $\vec{F}_e$ , entre os pneus e a estrada. A figura seguinte mostra o diagrama de corpo livre.



$R_1$  é a soma das duas reações normais nos dois pneus da frente e  $R_2$  a soma das reações normais dos pneus de atrás. A aceleração tangencial do automóvel é no sentido horizontal e igual a:

$$a_t = \frac{60/3.6}{20} = \frac{5}{6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

A lei do movimento para a translação conduz às equações:

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = m g \\ F_e = m a_t \end{cases} \implies \begin{cases} R_1 + R_2 = 9000 \\ F_e = \frac{9000 \times 5}{9.8 \times 6} \end{cases}$$

Como o automóvel não roda, a soma dos momentos das forças externas, em relação ao centro de massa (que é o mesmo centro de gravidade) deverá ser igual a zero. O peso não produz momento em relação ao centro de massa. Os momentos das forças  $\vec{R}_1$  e  $\vec{F}_e$ , em relação ao centro de massa, são no sentido dos ponteiros do relógio. O momento da força  $\vec{R}_2$  é no sentido oposto aos ponteiros do relógio. A soma dos momentos em relação ao centro de massa é:

$$1.2 R_2 - 0.6 R_1 - 0.57 F_e = 0$$

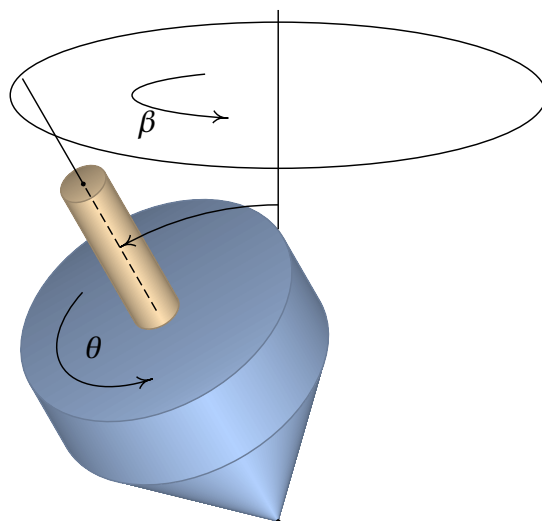
A resolução do sistema das 3 equações conduz a,

$$F_e = 765 \text{ N} \quad R_1 = 5758 \text{ N} \quad R_2 = 3242 \text{ N}$$

A força de atrito nos quatro pneus é 765 N, a reação em cada pneu da frente é 2879 N e em cada pneu de atrás 1621 N. Observe-se que no diagrama de corpo livre é equivalente colocar a força de atrito nos pneus da frente ou nos pneus de atrás, mas como é uma força de tração, será produzida pelos pneus onde o automóvel tiver tração.

## 5.7. Movimento geral do corpo rígido

A dinâmica do corpo rígido consiste no estudo dos efeitos das forças e binários externos na variação dos seus seis graus de liberdade. A trajetória de um ponto qualquer no corpo, usado como referência, dá informação sobre a variação de três desses graus de liberdade. A descrição da variação da direção do eixo de rotação dá informação sobre outros 2 graus de liberdade e a rotação em torno desse eixo fornece a informação sobre o sexto grau de liberdade. No pião da figura 5.11 indicam-se dois ângulos,  $\beta$  e  $\phi$ , que definem a direção do eixo do pião; um terceiro ângulo,  $\theta$ , determina a rotação do pião em relação ao seu eixo. Nesse caso, dois dos ângulos,  $\beta$  e  $\theta$ , variam em função do tempo e, portanto, há duas velocidades angulares,  $\dot{\beta}$  e  $\dot{\theta}$ .



**Figura 5.11.:** Os 3 graus de liberdade na rotação de um corpo rígido.

O pião está a rodar à volta do seu eixo, no sentido indicado para o ângulo  $\theta$ , com velocidade angular  $\dot{\theta}$ . Como tal, tem velocidade angular na direção do seu eixo e desde a ponta para a parte superior. Como o eixo do pião não está em posição vertical, o seu peso e a reação normal na ponta produzem binário no sentido em que o ângulo  $\phi$  aumenta. Esse binário implica uma aceleração angular  $\ddot{\alpha}$  tangente à circunferência na figura, e com o sentido indicado para o ângulo  $\beta$ , que faz com que o vetor velocidade angular, no eixo do pião rode com velocidade angular  $\dot{\beta}$ , no sentido indicado na circunferência.

O movimento geral dum corpo rígido é mais fácil de estudar usando dinâmica lagrangiana, em vez da mecânica vetorial usada neste capítulo. Concluiremos este capítulo analisando o caso da rotação plana, em que a direção do eixo de rotação permanece fixo, de forma que só há um ângulo ( $\theta$ ) que varia em função do tempo.

## 5.8. Rotação com eixo fixo

Quando o eixo de rotação de um corpo rígido permanece fixo em relação a um sistema inercial, a segunda lei de Newton será válida para as acelerações medidas no referencial do corpo rígido. Assim sendo, a equação 3.36

permite calcular a força que atua na massa diferencial  $dm$  em cada ponto

$$d\vec{f} = (R\alpha \hat{e}_t - R\omega^2 \hat{e}_n) dm \quad (5.22)$$

Cada uma dessas forças produz um momento  $\vec{r} \times d\vec{f}$  em relação à origem, mas como o corpo rígido pode rodar unicamente em torno do eixo fixo  $z$ , interessa unicamente calcular a componente  $z$ , obtida usando unicamente a projeção de  $\vec{r}$  no plano de rotação:

$$d\vec{M}_z = (R\hat{e}_n) \times d\vec{f} = R^2 \alpha \hat{k} dm \quad (5.23)$$

Integrando no volume do corpo rígido obtém-se a componente  $z$  do binário resultante,

$$M_{r,z} = \int dM_z = \alpha \int R^2 dm \quad (5.24)$$

A aceleração angular foi colocada fora do integral, por ser igual em todos os pontos do corpo rígido. O integral no lado direito,

$$I_z = \int R^2 dm \quad (5.25)$$

é o **momento de inércia**, do corpo rígido, em relação ao eixo dos  $z$ .

No integral  $\int dM_z$  todos os momentos das forças internas de contacto serão eliminados, em consequência da lei de ação e reação, ficando unicamente a soma dos momentos produzidos pelas forças externas,  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ . Assim sendo, a equação 5.24 conduz à lei da rotação com eixo de rotação fixo:

$$M_{r,z} = I_z \alpha \quad (5.26)$$

*Num corpo rígido que pode rodar em torno de um eixo fixo, a componente ao longo desse eixo, do momento resultante em relação a um ponto qualquer no eixo, é igual ao produto do seu momento de inércia em relação ao eixo, vezes a sua aceleração angular.*

#### Exemplo 5.4

Determine o momento de inércia de um cilindro homogêneo, com raio  $R$  e altura  $L$ , em relação ao seu eixo de simetria.

**Resolução.** Como o eixo de rotação é o mesmo eixo do cilindro, o volume do cilindro define-se em coordenadas cilíndricas através das condições  $0 \leq z \leq L$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $0 \leq R' \leq R$ .

O elemento diferencial de volume em coordenadas cilíndricas é  $(R dR d\theta dz)$  e, como tal,  $dm = \rho R dR d\theta dz$ , em que  $\rho$  é a massa volúmica. O momento de inércia é,

$$I_z = \rho \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R R'^3 dR' d\theta dz = \frac{\rho \pi L R^4}{2}$$

Observe-se que a massa do cilindro é obtida a partir do integral,

$$m = \rho \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R R' dR' d\theta dz = \rho \pi L R^2$$

Assim sendo, a expressão para o momento de inércia é:  $I_z = \frac{1}{2} m R^2$

No movimento de rotação, o momento de inércia joga um papel semelhante à massa no movimento de translação. Observe-se a semelhança da equação 5.26 com a segunda lei de Newton.

A tabela 5.1 mostra as expressões do momento de inércia de alguns sólidos em relação aos eixos que passam pelo seu centro de massa. O momento de inércia é sempre diretamente proporcional à massa do corpo e a expressão que multiplica a massa tem unidades de distância ao quadrado. Define-se o **raio de giração** em relação a um eixo de rotação, igual à raiz quadrada do momento de inércia dividido pela massa:

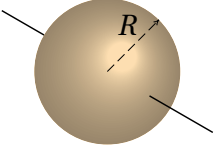
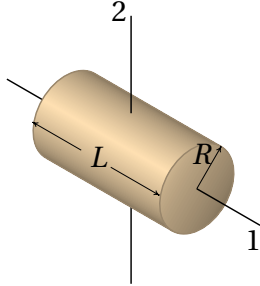
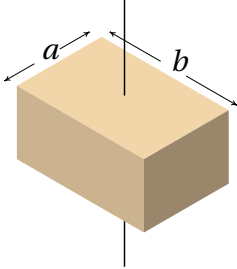
$$r_g = \sqrt{\frac{I_z}{m}} \quad (5.27)$$

O momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo centro de massa permite calcular o momento de inércia em relação a qualquer outro eixo paralelo, que não passe pelo centro de massa, usando-se o **teorema dos eixos paralelos**:

$$I_z = I_{cm} + m d^2 \quad (5.28)$$

onde  $m$  é a massa do corpo e  $d$  a distância entre os dois eixos paralelos. Também é possível calcular o momento de inércia de um sólido somando os momentos de inércia de várias partes que o constituem, já que o integral 5.25 pode ser escrito como a soma dos integrais nas várias partes.

**Tabela 5.1.:** Momentos de inércia de alguns sólidos com massa volúmica constante, para eixos que passam pelo centro de massa.

Esfera	Cilindro	Paralelepípedo
		
$\frac{2}{5} m R^2$	Eixo 1: $\frac{m}{2} R^2$ Eixo 2: $\frac{m}{12} (3 R^2 + L^2)$	$\frac{m}{12} (a^2 + b^2)$

O momento de uma barra suficientemente fina, de comprimento  $L$ , pode obter-se usando a tabela 5.1, a partir da expressão para um cilindro, no limite  $R \rightarrow 0$ , ou a partir da expressão para o paralelepípedo, com  $b = L$  e  $a \rightarrow 0$ .

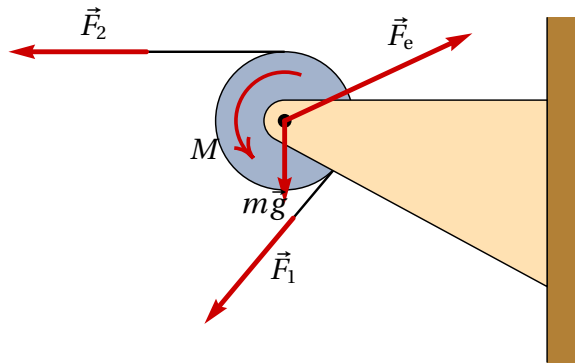
Uma roldana fixa é um exemplo de corpo rígido com eixo de rotação fixo. Se a roldana for homogênea, o centro de massa também estará no eixo de rotação. A figura 5.12 mostra uma roldana de massa  $m$  e raio  $R$ , em que o fio acompanha a rotação da roldana, sem deslizar. As forças e momentos externos são o peso,  $m\vec{g}$ , as tensões nos dois lados da corda,  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ , a força de contacto no eixo da roldana,  $\vec{F}_e$  e o binário  $M$  que é produzido pelo atrito no eixo da roldana, no sentido oposto à rotação da roldana.

O peso da roldana e a força de contacto  $\vec{F}_e$  não produzem momento em relação ao eixo. Como a roldana é um cilindro, usando a expressão para o momento de inércia na tabela 5.1, a equação para o binário resultante é,

$$R F_1 - R F_2 - M = \frac{1}{2} m R^2 \alpha \quad (5.29)$$

Quando o atrito no eixo pode ser ignorado,

$$F_1 - F_2 = \frac{1}{2} m a_t \quad (5.30)$$



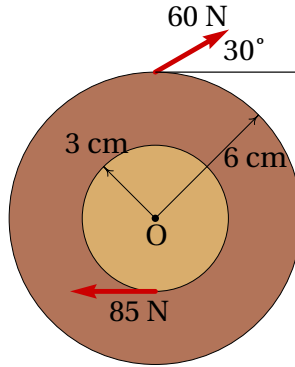
**Figura 5.12.:** Forças e binários externos sobre uma roldana.

em que  $a_t = R\alpha$  é a aceleração tangencial de um ponto na corda. Observe-se que, independentemente do raio da roldana, quando a massa da roldana for muito menor que  $F_1/a_t$  e  $F_2/a_t$ , pode admitir-se que a tensão é igual nos dois lados da corda.

## Perguntas

- As componentes cartesianas de uma força são  $\vec{F} = -3\hat{i} - 2\hat{j}$ . Em qual das posições na lista deveria ser aplicada a força para produzir momento no sentido horário em relação à origem?
  - $-2\hat{i} + 3\hat{j}$
  - $-3\hat{i} + 2\hat{j}$
  - $2\hat{i} + 3\hat{j}$
  - $3\hat{i} + 2\hat{j}$
  - $3\hat{i} - 2\hat{j}$
- Duas crianças com massas de 30 kg e 45 kg estão sentadas nos dois lados de um sobe e desce. Se a criança mais pesada estiver sentada a 1.2 m do eixo do sobe e desce, a que distância do eixo deverá sentar-se a outra criança para manter o sobe e desce em equilíbrio?
  - 1.5 m
  - 0.8 m
  - 1.8 m
  - 1.2 m
  - 0.98 m

3. Se um objeto é dividido em duas partes, fazendo um corte vertical ao longo de uma reta que passa pelo seu centro de gravidade, qual das afirmações acerca dos dois pedaços obtidos é verdadeira?
- A. Devem ter a mesma massa.      D. Devem ter a mesma área.  
 B. Podem ter massas diferentes.      E. Devem ter o mesmo volume.  
 C. Devem ter o mesmo peso.
4. Aplicam-se duas forças externas sobre um disco, como mostra na figura. Calcule o momento resultante, em relação ao ponto O, em unidades de N·m.

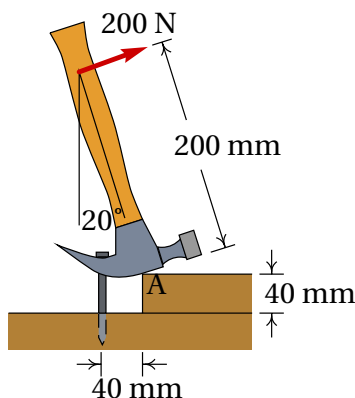


- A. 0.57                                  C. 4.35                                  E. 6.15  
 B. 1.05                                  D. 5.67
5. Uma peça metálica com massa volúmica constante e massa  $m$  é construída com dois cilindros da mesma altura, mas raios diferentes  $a > b$ , colados um sobre o outro de forma que os seus eixos estejam alinhados. Calcule o momento de inércia da peça em relação ao seu eixo de simetria.
- A.  $\frac{1}{2}m(a^2 - b^2)$                                   D.  $\frac{1}{2}m(a^2 + b^2)$   
 B.  $\frac{1}{2}m(a^4 + b^4)$                                   E.  $\frac{1}{2}m\left(\frac{a^2 + b^2}{a + b}\right)$   
 C.  $\frac{1}{2}m\left(\frac{a^4 + b^4}{a^2 + b^2}\right)$

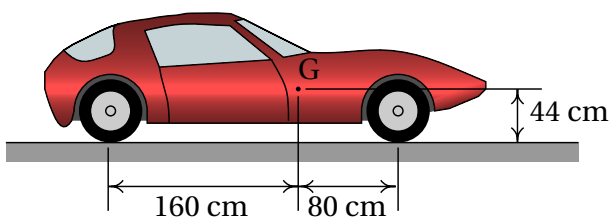


## Problemas

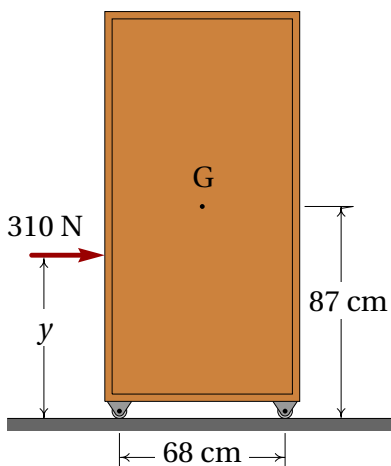
1. O martelo na figura apoia-se sobre um bloco de madeira de 40 mm de espessura, para facilitar a extração do prego. Sabendo que é necessária uma força de 200 N (perpendicular ao martelo) para extrair o prego, calcule a força sobre o prego e a reação no ponto A. Admita que o peso do martelo pode ser desprezado e em A existe suficiente atrito para evitar que o martelo escorregue.



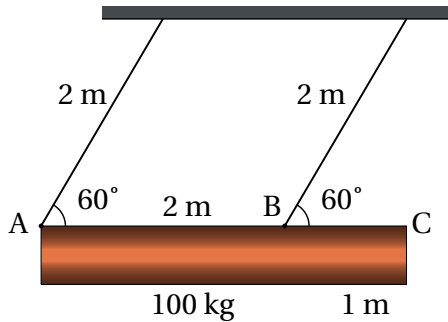
2. Um automóvel com tração frontal acelera uniformemente desde o repouso atingindo uma velocidade de 100 km/h em 11 segundos. Se o peso do automóvel for 9750 N, calcule as reações normais e a força de atrito sobre cada pneu. Qual será o valor mínimo que deverá ter o coeficiente de atrito estático entre os pneus e a estrada para que o automóvel possa atingir essa aceleração?



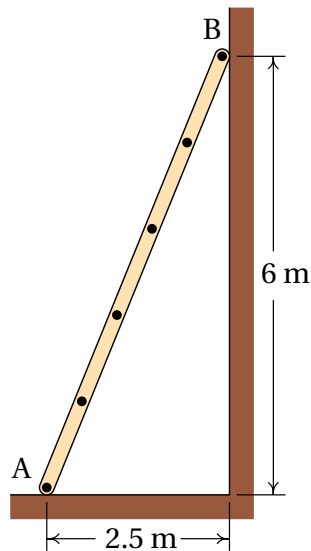
3. Um armário de 45 kg, montado sobre rodas que o deixam andar livremente sobre o chão, é acelerado por uma força externa de 310 N.
  - (a) Encontre os valores máximo e mínimo que pode ter a altura  $y$  para o armário acelerar sem as rodas perderem o contacto com o chão.
  - (b) Determine a aceleração do armário, quando  $y$  estiver entre os valores mínimo e máximo calculados na alínea anterior.



4. Usando integração no volume do sólido, demonstre o resultado da tabela 5.1, para o momento de inércia de um paralelepípedo com eixo de rotação perpendicular a uma das faces e passando pelo centro de massa.
5. Um tronco uniforme tem forma cilíndrica com 48 cm de diâmetro, 3 m de comprimento, massa de 100 kg e está pendurado em posição horizontal, por meio de dois cabos de 2 m, como mostra a figura. O tronco larga-se a partir do repouso na posição em que cada cabo faz um ângulo de  $60^\circ$  com a horizontal. Determine a tensão e a aceleração angular de cada um dos cabos, no preciso instante em que o tronco é largado a partir do repouso.

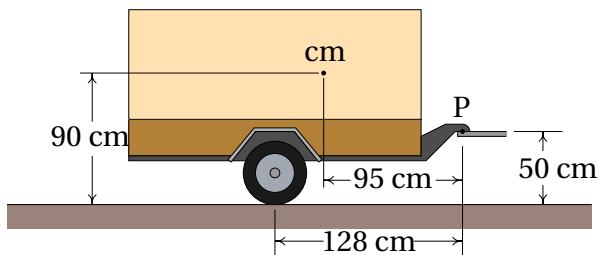


6. A escada na figura está apoiada numa superfície horizontal (ponto A) e numa parede vertical (ponto B). Entre a escada e a superfície horizontal o coeficiente de atrito estático é  $\mu_e$ , enquanto que o atrito da escada com a parede vertical é desprezável. Admitindo que o centro de gravidade da escada se encontra a metade do seu comprimento, calcule o valor mínimo de  $\mu_e$ , para garantir que a escada permaneça em repouso.

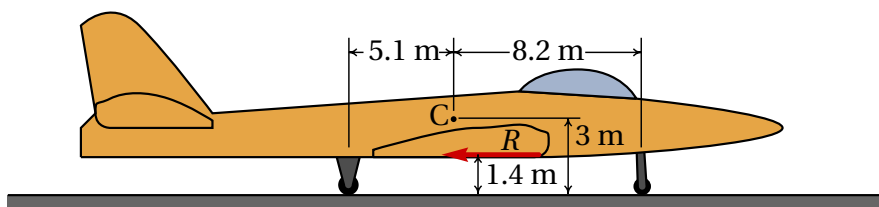


7. A massa do reboque na figura é 750 kg e está ligado no ponto P a uma trela de um automóvel. A estrada é horizontal e os dois pneus idênticos podem ser considerados como um só, com uma única reação normal e

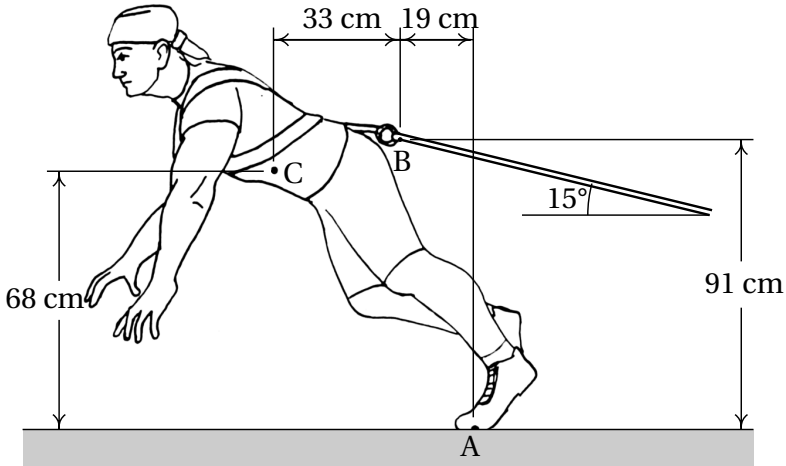
força de atrito desprezável; a resistência do ar também será desprezada. (a) Calcule a reação normal nos pneus e a força vertical no ponto P, quando a velocidade for constante. (b) Quando o automóvel estiver a acelerar, com  $a_t = 2 \text{ m/s}^2$ , a força em P terá componentes horizontal e vertical. Calcule essas componentes e a reação normal nos pneus (o momento de inércia das rodas e o atrito com a estrada são desprezáveis).



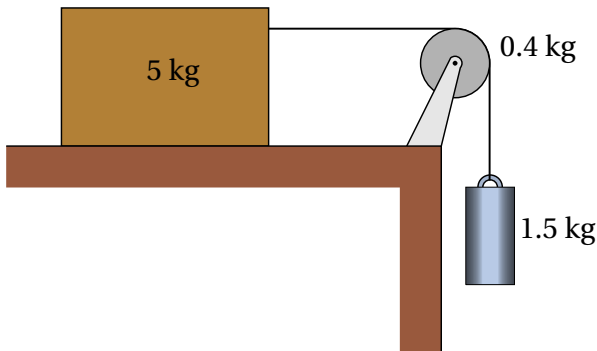
8. O avião na figura, com massa total de  $1.1 \times 10^5 \text{ kg}$ , aterra numa pista horizontal. O ponto C representa o centro de gravidade. No instante em que a velocidade é de 210 km/h (para a direita), o piloto liga as turbinas em modo inverso, produzindo a força constante  $R$  (representada na figura) e após ter percorrido 580 m na pista a velocidade diminui para 70 km/h. Durante esse percurso, as forças de atrito nos pneus e a resistência do ar podem ser ignoradas, em comparação com a força  $R$  que é muito maior. Calcule a reação normal na roda da frente.



9. Um atleta com massa de 91 kg puxa um camião numa estrada horizontal, com velocidade constante, por meio de uma corda amarrada às suas costas. A figura mostra as posições relativas do centro de gravidade do atleta, C, do ponto de apoio do seu pé com o chão, A, e do ponto de ligação com a corda, B.
- (a) Calcule o módulo da tensão na corda. (b) Faça um diagrama com as forças que julga que poderão estar a atuar no camião.

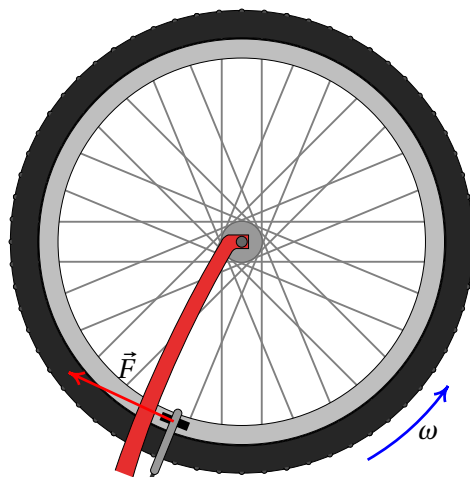


10. O cilindro de 1.5 kg na figura desce verticalmente, fazendo acelerar o bloco de 5 kg sobre a mesa horizontal. A roldana pode ser considerada um disco uniforme de massa 0.4 kg. O fio faz rodar a roldana, sem deslizar sobre a sua superfície. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a mesa é 0.2. Determine o valor da aceleração do bloco e do cilindro, desprezando o atrito no eixo da roldana, a massa do fio e a resistência do ar.

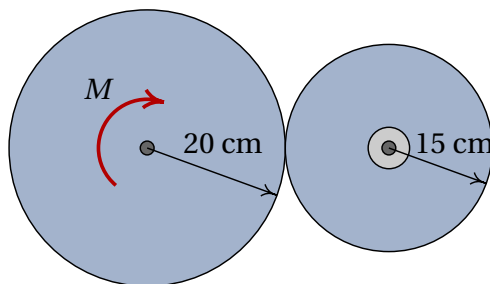


11. Para testar os travões, uma bicicleta foi colocada com as rodas para o ar e a roda foi posta a rodar livremente, como mostra a figura. Foi medido o tempo que a roda demorou a dar 10 voltas, obtendo-se o valor de 8.2 s (admita que nesse intervalo a velocidade angular  $\omega$  permanece constante). Imediatamente a seguir, aplicaram-se os travões e a roda demorou 2.9 s até parar completamente. A figura mostra a força de atrito  $\vec{F}$  entre os calços e o aro, que é tangente ao aro e aplicada a uma distância de 27.1 cm do eixo da roda.

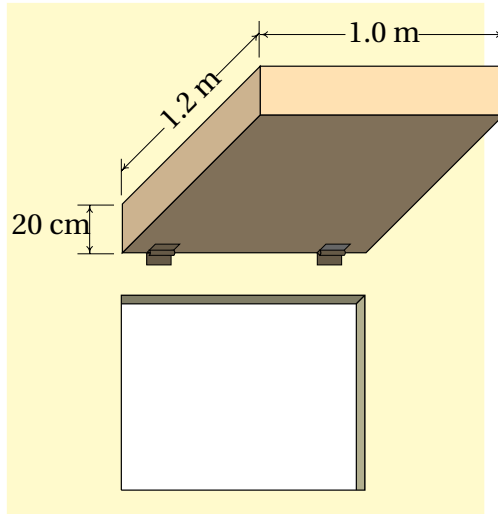
- (a) Admitindo que a força  $\vec{F}$  é constante, a aceleração angular que ela produz também será constante; calcule essa aceleração angular.
- (b) Calcule o número de voltas efetuadas pela roda durante o tempo em que os travões atuaram.
- (c) Sabendo que o momento de inércia da roda, em relação ao seu centro, é igual a  $0.135 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ , calcule o módulo da força  $\vec{F}$ .



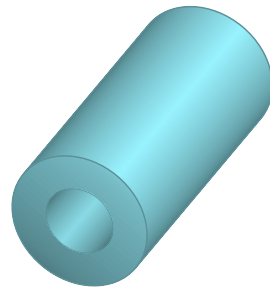
12. Uma roda A, com raio de 20 cm, massa de 600 g e raio de giração de 12 cm (relativo ao seu eixo), está ligada a um motor que produz binário  $M = 0.8 \text{ N}\cdot\text{m}$  no sentido indicado na figura. A roda B, com raio de 15 cm, massa de 400 g e raio de giração de 10 cm (relativo ao seu eixo) mantém-se em contacto com a roda A, sem deslizar. A roda B está ligada ao seu eixo por meio de um rolamento, que faz com que o atrito no eixo seja desprezável. Determine a aceleração angular da roda B. **Sugestão:** analise separadamente os diagramas de corpo livre das duas rodas, tendo em conta que entre as rodas há força de atrito.



13. A caixa retangular homogênea na figura está ligada a duas dobradiças que lhe permitem rodar para fechar a janela, ou abrir até a posição horizontal apresentada na figura, para dar sombra durante o dia. A corrente que segura a caixa na posição horizontal quebra-se repentinamente e a caixa cai batendo na parede. Desprezando o atrito nos eixos das dobradiças e a resistência do ar, calcule a velocidade angular com que a caixa bate na parede.

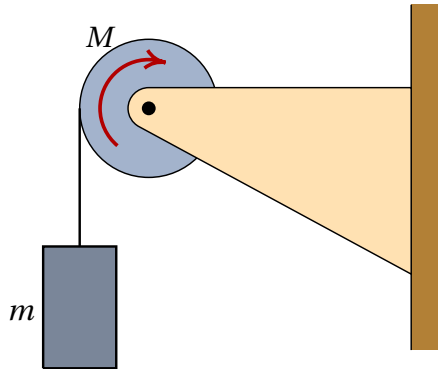


14. Encontre a expressão do momento de inércia de um cilindro de massa  $m$  e raio  $r_1$ , com um orifício cilíndrico, coaxial, de raio  $r_2$  (menor que  $r_1$ ), em torno do eixo do cilindro. **Sugestão:** Determine a massa que teria o cilindro completo, sem orifício, em função de  $m$ , e a massa do cilindro que é removido quando se faz o orifício; o momento de inércia é igual ao momento de inércia do cilindro completo (consulte a tabela 5.1), mais o momento de inércia do cilindro que foi removido, admitindo que a massa deste último seja negativa!



15. Para medir o momento de inércia de uma roldana com raio de 5 cm, colou-se um fio que foi logo enrolado e ligado a um cilindro de massa  $m = 80$  g. O cilindro desce livremente desenrolando o fio e a acelera-

ção angular da roldana foi medida, obtendo-se o valor  $\alpha = 3 \text{ rad/s}^2$ . Sabendo que o atrito no eixo da roldana produz um binário constante  $M = 0.02 \text{ N}\cdot\text{m}$ , no sentido indicado na figura, encontre o momento de inércia da roldana em relação ao seu eixo.

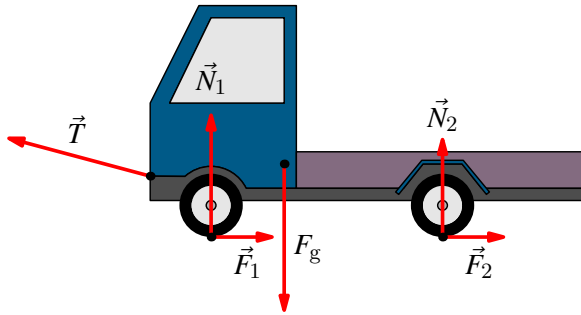


## Respostas

**Perguntas:** 1. E. 2. C. 3. B. 4. D. 5. C.

### Problemas

- O prego exerce uma força de 1000 N, para baixo.  $\vec{F}_A = -187.9 \hat{i} + 931.6 \hat{j}$  (N)
- Pneus da frente:  $R_n = 3020 \text{ N}$ ,  $F_a = 1256 \text{ N}$ . Pneus trazeiros:  $R_n = 1855 \text{ N}$ ,  $F_a = 0$  (admitindo que as rodas trazeiras são perfeitamente livres). O coeficiente de atrito estático mínimo é 0.416.
- (a) Altura mínima 38.6 cm, máxima 135.4 cm (b)  $\vec{a} = 6.89 \hat{i}$  (m/s<sup>2</sup>)
- Neste caso  $R^2 = x^2 + y^2$  e o volume do sólido é definido por  $-a/2 \leq x \leq a/2$ ,  $-b/2 \leq y \leq b/2$ ,  $-c/2 \leq z \leq c/2$ .
- $T_A = 153.4 \text{ N}$ ,  $T_B = 695.3 \text{ N}$ ,  $\alpha_A = \alpha_B = g/4 = 2.45 \text{ rad/s}^2$
- 0.21
- (a)  $R_n = 5455 \text{ N}$ ,  $F_y = 1895 \text{ N}$ . (b)  $F_x = 1500 \text{ N}$ ,  $F_y = 1426 \text{ N}$ ,  $R_n = 5923 \text{ N}$ .
- $448 \times 10^3 \text{ N}$ .
- (a) 559 N. (b) No camião atuam a tensão da corda,  $\vec{T}$ , o peso,  $\vec{P}$ , as reações normais nas rodas,  $\vec{R}_1$  e  $\vec{R}_2$ , e as forças de atrito nas rodas,  $\vec{F}_1$  e

$\vec{F}_2$ :

10.  $0.7313 \text{ m/s}^2$ .
11. (a)  $2.64 \text{ s}^{-2}$ . (b) 1.77 voltas. (c) 1.32 N.
12.  $67.72 \text{ s}^{-2}$ .
13.  $5.274 \text{ s}^{-1}$
14.  $\frac{m}{2}(r_1^2 + r_2^2)$
15.  $0.0062 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$