

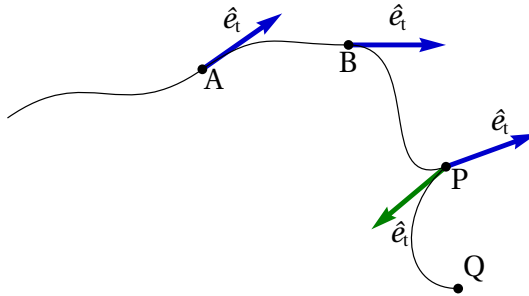
### 3. Movimento curvilíneo



As fortes acelerações sentidas numa montanha russa não são devidas apenas aos aumentos e diminuições de velocidade, mas são causadas também pelo movimento curvilíneo. A taxa de aumento da velocidade é apenas uma das componentes da aceleração, a aceleração tangencial. A outra componente da aceleração depende da velocidade e do raio de curvatura da trajetória como se demonstra neste capítulo.

### 3.1. Versor tangencial

Em cada ponto de uma trajetória pode definir-se um **versor tangencial**  $\hat{e}_t$ , na direção tangente à trajetória e no sentido em que a posição  $s$  aumenta. A figura 3.1 mostra o versor tangencial em três pontos A, B e P de uma trajetória.



**Figura 3.1.:** Versor tangencial  $\hat{e}_t$  em três pontos da trajetória.

Observe-se que no ponto P existem dois versores tangenciais. Um deles é tangente à curva entre B e P e o outro é tangente à curva entre P e Q. O vetor velocidade de um corpo que segue essa trajetória será sempre na mesma direção do versor tangencial (o sentido pode ser o mesmo ou oposto). Nos pontos como P, onde existem dois vetores tangenciais, a velocidade é necessariamente nula; o corpo fica momentaneamente em repouso nesse ponto, começando logo a deslocar-se em outra direção diferente à que seguia antes de parar.

Nos pontos onde a velocidade não é nula, existe sempre um único versor tangencial  $\hat{e}_t$ , que define a direção do vetor velocidade. Ou seja, a velocidade vetorial pode ser escrita,

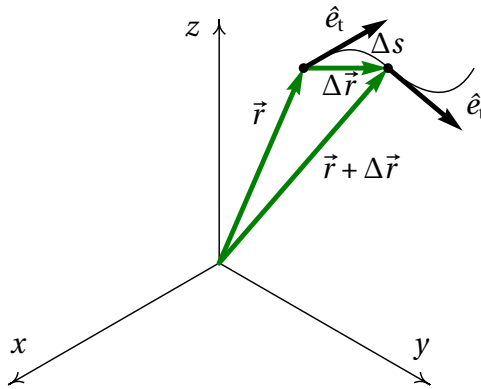
$$\vec{v} = v \hat{e}_t \quad (3.1)$$

Conforme referido no capítulo 2, a velocidade vetorial  $\vec{v}$  é igual à derivada do vetor posição  $\vec{r}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (3.2)$$

O vetor posição  $\vec{r}$  não tem de ter nenhuma relação com o versor tangencial, já que  $\vec{r}$  depende do ponto que esteja a ser usado como origem do referencial (ver figura 3.2). No entanto, o vetor deslocamento  $d\vec{r}$  sim é

independente da escolha da origem e, assim sendo, a equação 3.2 garante que o vetor velocidade é independente da escolha da origem do referencial.



**Figura 3.2.:** Deslocamento vetorial entre duas posições  $\vec{r}$  e  $\vec{r} + \Delta \vec{r}$ .

Se  $\Delta \vec{r}$  for o vetor deslocamento durante um intervalo de tempo  $\Delta t$  (figura 3.2), a distância percorrida durante esse intervalo,  $|\Delta s|$ , é sempre maior ou igual que o módulo de  $\Delta \vec{r}$ . A distância percorrida é medida sobre a trajetória, enquanto que o módulo do deslocamento é medido no segmento de reta entre os pontos inicial e final.

O módulo de  $\Delta \vec{r}$  só é igual a  $\Delta s$  quando a trajetória é reta, com versor tangencial constante. No limite quando  $\Delta t$  for muito pequeno, os dois pontos estarão muito próximos na trajetória e, assim sendo, a direção de  $\Delta \vec{r}$  será aproximadamente a mesma direção do versor tangencial e o módulo de  $\Delta \vec{r}$  será aproximadamente igual a  $|\Delta s|$ ; isto é, o vetor deslocamento é aproximadamente igual a  $\Delta s \hat{e}_t$ . A derivada do vetor posição é então,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \hat{e}_t = \frac{ds}{dt} \hat{e}_t \quad (3.3)$$

E, substituindo na equação 3.2, obtém-se,

$$\boxed{\vec{v} = \dot{s} \hat{e}_t} \quad (3.4)$$

O valor da velocidade, em qualquer movimento, é sempre igual à derivada da posição na trajetória,  $s$ , em ordem ao tempo. Este resultado explica porquê no capítulo 1 denominou-se “velocidade” à derivada  $\dot{s}$ , já que  $\dot{s}$  não é apenas uma componente da velocidade mas sim o valor da velocidade.

### 3.2. Versor normal

A aceleração vetorial  $\vec{a}$  é igual à derivada da velocidade em ordem ao tempo e, como tal, derivando o lado direito da equação 3.4 obtém-se a expressão da aceleração em relação ao versor tangencial:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{s} \hat{e}_t + s \frac{d\hat{e}_t}{dt} \quad (3.5)$$

Observe-se que a derivada do vetor tangencial não é nula, porque esse vetor não é necessariamente igual em diferentes instantes. A figura 3.3 mostra como calcular a derivada de  $\hat{e}_t$ . Deslocando os dois versores tangenciais dos pontos A e B da figura 3.1 para um ponto comum, o aumento de  $\hat{e}_t$  no intervalo desde A até B é o vetor  $\Delta \hat{e}_t$  que une os dois vetores.

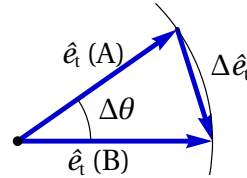


Figura 3.3.: Variação do versor tangencial.

Sendo o módulo de  $\hat{e}_t$  igual a 1, os dois versores  $\hat{e}_t$  na figura 3.3 descrevem um arco de círculo com raio 1 e ângulo  $\Delta\theta$ . Se o ângulo for medido em radianos, o comprimento desse arco será igual a  $\Delta\theta$ . Se o intervalo de tempo  $\Delta t$  for aproximadamente zero, os dois pontos considerados, A e B, estarão muito próximos na trajetória, o vetor  $\Delta \hat{e}_t$  será perpendicular à trajetória e o seu módulo será aproximadamente igual ao arco de círculo  $\Delta\theta$ ; conclui-se que a derivada de  $\hat{e}_t$  é,

$$\frac{d\hat{e}_t}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \hat{e}_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \hat{e}_n = \dot{\theta} \hat{e}_n \quad (3.6)$$

em que  $\hat{e}_n$  é o **versor normal**, perpendicular à trajetória, e  $\dot{\theta}$  é a **velocidade angular**. Substituindo essa derivada na equação 3.5, obtém-se a expressão para a aceleração:

$$\vec{a} = \dot{s} \hat{e}_t + s \dot{\theta} \hat{e}_n \quad (3.7)$$

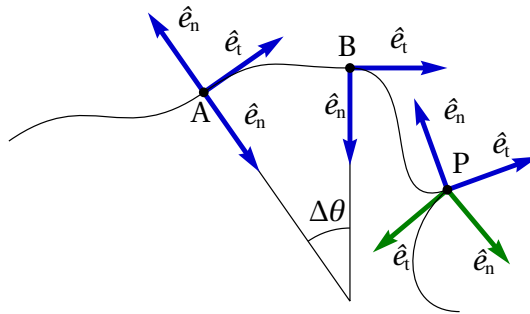
Concluindo, a aceleração é um vetor com componentes tangente e normal (perpendicular) à trajetória. A componente na direção tangente,  $a_t = \dot{s}$ , é a aceleração tangencial já introduzida no capítulo 1. A componente normal da aceleração é igual ao produto do valor da velocidade  $s$  pelo valor da velocidade angular  $\dot{\theta}$ ,

$$a_n = s \dot{\theta} \quad (3.8)$$

Tendo em conta que os versores  $\hat{e}_t$  e  $\hat{e}_n$  são perpendiculares em todos os pontos da trajetória, a equação 3.7 implica que o módulo da aceleração,  $|\vec{a}|$ , é o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo em que os catetos são as componentes tangencial e normal da aceleração; o teorema de Pitágoras para esse triângulo é então,

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2 \quad (3.9)$$

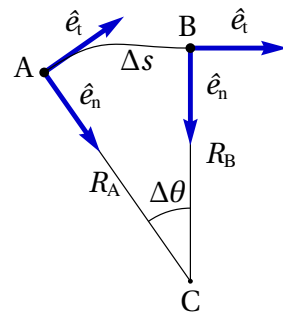
O ângulo de rotação do versor tangencial,  $\Delta\theta$ , é também igual ao ângulo de rotação do versor normal  $\hat{e}_n$ . A figura 3.4 mostra os versores normais nos mesmos pontos da trajetória mostrados na figura 3.1. Observe-se que no ponto A existem dois versores normais, com a mesma direção mas sentidos opostos, porque a trajetória curva-se para cima antes do ponto A, mas a partir do ponto A começa a curvar-se para baixo. Esse tipo de ponto, onde o sentido da curvatura muda, chama-se **ponto de inflexão**.



**Figura 3.4.:** Versores tangencial e normal em alguns pontos da trajetória.

No ponto P da figura 3.4 existem duas direções normais, porque, como foi discutido na secção anterior, existem dois versores tangenciais. Em qualquer ponto o versor normal aponta no sentido em que a trajetória se curva, excepto no caso de uma trajetória retilínea, em que existem infinitos versores perpendiculares ao versor tangencial  $\hat{e}_t$ .

A figura 3.5 mostra o versor normal no ponto inicial A (no instante  $t_i$ ) e o ponto final B (no instante  $t_i + \Delta t$ ) durante um intervalo de tempo  $\Delta t$ . Se  $\Delta t$  é muito pequeno, as



**Figura 3.5.:** Raio de curvatura.

direções dos dois versores cruzam-se num ponto comum  $C$ . As distâncias desde  $C$  até os pontos  $A$  e  $B$  são diferentes ( $R_A$  e  $R_B$ ), mas serão iguais no limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , em que o ponto  $C$  aproxima-se do centro de curvatura da curva. A distância desde o centro de curvatura num instante e o ponto da trajetória, nesse mesmo instante, é o raio de curvatura,  $R$ , da trajetória.

Em cada ponto da trajetória existem um centro e um raio de curvatura. Cada percurso infinitesimal de comprimento  $ds$  pode ser aproximado por um arco de circunferência de raio  $R$  e ângulo  $d\theta$ ; a distância percorrida é o comprimento desse arco,  $ds = R d\theta$ . Assim sendo, conclui-se que o valor da velocidade angular é,

$$\dot{\theta} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{R \Delta t} = \frac{\dot{s}}{R} \quad (3.10)$$

Ou seja, em cada ponto da trajetória a velocidade angular  $\dot{\theta}$  é igual ao valor da velocidade,  $\dot{s}$ , dividida pelo raio de curvatura  $R$  nesse ponto. Usando este resultado, a componente normal da aceleração,  $a_n$ , pode ser escrita do modo seguinte

$$a_n = \frac{v^2}{R} \quad (3.11)$$

O versor normal e a componente normal da aceleração, apontam sempre no sentido do centro de curvatura. Como tal, a componente normal da aceleração,  $a_n$ , também costuma chamar-se **aceleração centrípeta**.

Observe-se que a aceleração tangencial,  $\ddot{s}$ , pode ser positiva ou negativa, mas a aceleração normal, ou centrípeta, é sempre positiva, porque o produto  $\dot{s}\dot{\theta} = v^2/R$  é sempre positivo ( $s$  e  $\theta$  ambos aumentam, se o movimento é no sentido do versor tangencial, ou ambos diminuem se o movimento é no sentido oposto).

### Exemplo 3.1

A posição de uma partícula, em função do tempo  $t$ , é dada pela expressão (SI):

$$\vec{r} = 5t \hat{i} + \frac{3}{2}t^2 \hat{j} + 2(1-t^2) \hat{k}$$

Determine a expressão para o raio de curvatura da trajetória em função do tempo e calcule o raio de curvatura em  $t = 0$  e  $t = 1$ .

**Resolução:** Para determinar a expressão do raio de curvatura é necessário saber as expressões do valor da velocidade e da componente normal da

aceleração, em função do tempo. Essas expressões podem ser obtidas a partir da velocidade e da aceleração. Usando o Maxima calculam-se esses vetores do modo seguinte

```
(%i1) vetor_r: [5*t, 3*t^2/2, 2*(1-t^2)]$
(%i2) vetor_v: diff (vetor_r, t);
(%o2)      [5, 3 t, -4 t]
(%i3) vetor_a: diff (vetor_v, t);
(%o3)      [0, 3, -4]
```

Designando por  $v$  e  $a$ , os módulos desses vetores, iguais à raiz quadrada do produto escalar de cada vetor com si próprio (o produto escalar no Maxima obtém-se colocando um ponto entre os vetores) obtém-se:

```
(%i4) v: sqrt (vetor_v.vetor_v);
(%o4)       $\sqrt{25 t^2 + 25}$ 
(%i5) a: sqrt (vetor_a.vetor_a);
(%o5)      5
```

Observe-se que o módulo da aceleração é constante, o que implica uma trajetória parabólica ou linear. Para calcular a componente normal da aceleração, calcula-se primeiro a componente tangencial da aceleração,  $\dot{v}$ ,

```
(%i6) at: diff (v, t);
(%o6)       $\frac{25 t}{\sqrt{25 t^2 + 25}}$ 
```

e, usando a equação 3.9, obtém-se a componente normal da aceleração:

```
(%i7) an: ratsimp (sqrt (a^2 - at^2));
(%o7)       $\frac{5}{\sqrt{t^2 + 1}}$ 
```

As componentes tangencial e normal da aceleração dependem do tempo, embora o valor da aceleração seja constante; isso já aponta para o facto de que a curvatura da trajetória não será constante e, como tal, a trajetória será parabólica. Usando a equação 3.11 determina-se a expressão do raio de curvatura:

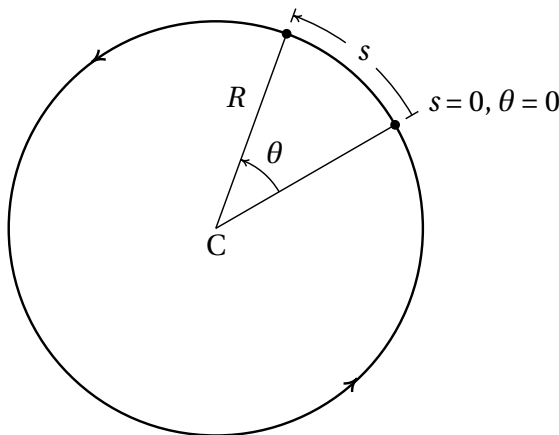
```
(%i8) R: ratsimp (v^2/an);
(%o8)       $\sqrt{t^2+1}(5t^2+5)$ 
```

Nos instantes  $t = 0$  e  $t = 1$  os raios de curvatura são,

```
(%i9) subst (t=0, R);
(%o9)      5
(%i10) float (subst (t=1, R));
(%o10)     14.14
```

### 3.3. Movimento circular

No caso em que o raio de curvatura  $R$  é constante e o centro de curvatura permanece fixo, a trajetória é uma circunferência e o movimento é circular, como no caso ilustrado na figura 3.6. Para determinar a posição em cada instante, basta um único grau de liberdade, que pode ser a posição na circunferência,  $s$ , ou o ângulo  $\theta$ .



**Figura 3.6.:** Duas posições numa trajetória de um movimento circular.

A relação entre o ângulo e a posição na trajetória, se a origem usada para



medir as duas e o sentido positivo são os mesmos (ver figura 3.6), é

$$s = R\theta \quad (3.12)$$

Sendo  $R$  constante, derivando os dois lados da equação anterior obtém-se,

$$v = R\omega \quad (3.13)$$

em que  $\omega = \dot{\theta}$  é a velocidade angular. A equação 3.13 é a mesma equação 3.10, que aqui foi obtida no caso particular do movimento circular, em que  $R$  é constante, mas trata-se de uma equação geral, válida em qualquer movimento. Derivando os dois lados da equação 3.13 em ordem ao tempo obtém-se,

$$a_t = R\alpha \quad (3.14)$$

onde  $\alpha = \dot{\omega}$  é a **aceleração angular**. A aceleração centrípeta é dada pela equação 3.11, que pode ser escrita também em função do valor da velocidade angular,

$$a_n = R\omega^2 = v\omega \quad (3.15)$$

No caso particular em que a velocidade angular é constante, a velocidade linear também será constante, as acelerações angular e tangencial serão nulas e o movimento chama-se movimento circular uniforme. Nesse caso, como a velocidade angular é constante, a derivada  $\theta$  pode calcular-se dividindo o ângulo num intervalo de tempo qualquer, pelo valor desse intervalo de tempo:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (3.16)$$

Num intervalo de tempo igual ao **período**,  $T$ , do movimento circular uniforme, o ângulo corresponde a uma volta completa,  $\Delta\theta = 2\pi$ , e a equação anterior conduz a uma expressão para o período,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (3.17)$$

A **frequência** de rotação,  $f$ , igual ao inverso do período, é o número do voltas que o ponto dá por unidade de tempo.

A relação entre o ângulo de rotação  $\theta$  e os valores da velocidade angular  $\omega$  e da aceleração angular  $\alpha$ , é análoga à relação entre a posição na trajetória,  $s$ , o valor da velocidade,  $v$ , e a aceleração tangencial,  $a_t$ ,

$$\omega = \dot{\theta} \quad \alpha = \dot{\omega} \quad \alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta} \quad (3.18)$$

Estas são as equações cinemáticas para o movimento de rotação, que podem ser resolvidas usando os mesmos métodos usados no capítulo 1. As equações 3.12, 3.13 e 3.14 mostram que as variáveis cinemáticas de translação ( $s$ ,  $v$ ,  $a_t$ ) são todas iguais ao produto da respectiva variável cinemática de rotação, ( $\theta$ ,  $\omega$ ,  $\alpha$ ), pelo raio de curvatura  $R$ .

### 3.4. Rotação dos corpos rígidos

O corpo rígido na figura 3.7 está em movimento. Dois pontos a e b, nas posições  $\vec{r}_a$  e  $\vec{r}_b$ , têm velocidades  $\vec{v}_a$  e  $\vec{v}_b$  no mesmo instante  $t$ . Se o movimento do corpo fosse de translação sem rotação, as velocidades de todos os pontos deviam ser todas iguais, a cada instante, e, como tal, as trajetórias de todos os pontos no corpo seria a mesma curva. Como vimos no capítulo 1, nesse caso bastava estudar o movimento de um ponto qualquer no corpo.

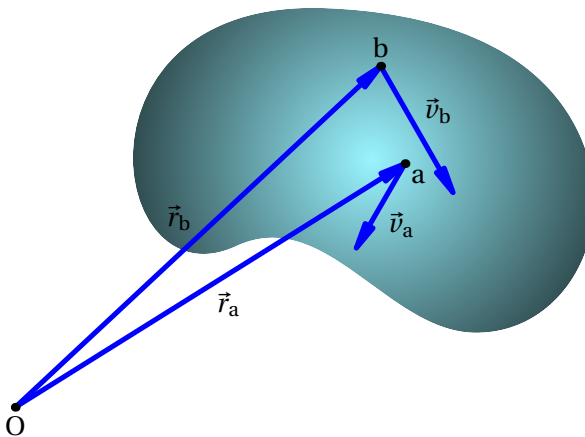


Figura 3.7.: Corpo rígido em movimento.

Como as velocidades dos pontos a e b na figura 3.7, são diferentes, conclui-se que o movimento não é de translação. A posição do ponto b relativa ao ponto a, é  $\vec{r}_{b/a} = \vec{r}_b - \vec{r}_a$ , que não permanece constante, já que os pontos a e b estão a deslocar-se em diferentes direções e com rapidez diferente. No entanto, o módulo dessa posição relativa,

$$|r_{b/a}| = \sqrt{\vec{r}_{b/a} \cdot \vec{r}_{b/a}} \quad (3.19)$$

deverá permanecer constante, porque o corpo é rígido. Como tal, a sua derivada em ordem ao tempo deverá ser nula:

$$\frac{1}{2|r_{b/a}|} (\vec{v}_{b/a} \cdot \vec{r}_{b/a} + \vec{r}_{b/a} \cdot \vec{v}_{b/a}) = 0 \quad (3.20)$$

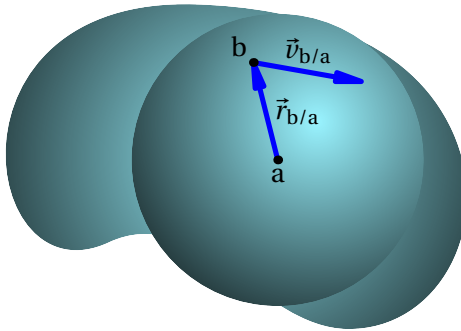
onde,  $\vec{v}_{b/a}$  é a velocidade do ponto b, relativa ao ponto a, igual à derivada de  $\vec{r}_{b/a}$  em ordem ao tempo. A equação anterior implica:

$$\vec{v}_{b/a} \cdot \vec{r}_{b/a} = 0 \quad (3.21)$$

Esse resultado é geral para quaisquer dois pontos a e b no corpo rígido, permitindo concluir que:

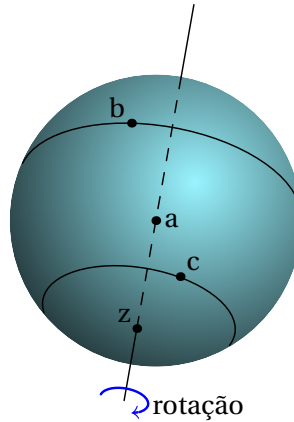
*A velocidade relativa entre dois pontos num corpo rígido é sempre perpendicular à posição relativa entre eles.*

Visto desde um ponto a, o ponto b permanecerá sempre à mesma distância,  $r_{b/a}$ , deslocando-se na superfície da esfera de raio  $r_{b/a}$ , com centro em a (figura 3.8). Todos os outros pontos no corpo rígido deslocam-se em esferas com centro em a, e com diferentes raios.



**Figura 3.8.:** Posição e velocidade relativas a um ponto no corpo rígido.

A cada instante  $t$ , a velocidade de b relativa ao ponto a é tangente a uma circunferência na superfície da esfera de raio  $r_{b/a}$ ; essa circunferência poderá ter raio igual a  $r_{b/a}$  ou menor (figura 3.9). Outro ponto c, que esteja à mesma distância de a,  $r_{c/a} = r_{b/a}$ , deverá ter velocidade tangente a outra circunferência paralela à circunferência de b. Se assim não fosse, a distância entre b e c estaria a variar, que não é possível porque o corpo é rígido. E o sentido do movimento dos dois pontos b e c, nessas circunferências, deverá ser o mesmo (sentido de rotação indicado na figura 3.9).



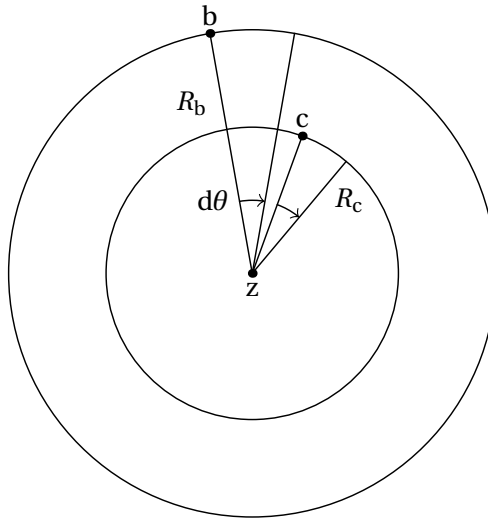
**Figura 3.9.:** Movimento de dois pontos, b e c, à mesma distância do ponto a.

Como os planos em que se deslocam os pontos b e c, em relação ao ponto a, são paralelos, as duas circunferências na esfera podem ser projetadas num mesmo plano, chamado plano de rotação, com centro no ponto a, como mostra a figura 3.10. Todos os outros pontos à mesma distância terão velocidades tangentes a circunferências com centro em a e raio menor ou igual que o raio da esfera,  $r_{b/a}$ . Em particular, existirão dois pontos z e z', na interseção da esfera com a reta perpendicular ao plano de rotação passando pelo centro a, que estão em repouso em relação ao ponto a ( $\vec{v}_{z/a} = \vec{v}_{z'/a} = 0$ ). Como tal, a velocidade dos pontos no eixo de rotação é a mesma:  $\vec{v}_z = \vec{v}_{z'} = \vec{v}_a$

A reta que passa por a e z é o eixo de rotação do corpo rígido. Qualquer outro ponto no corpo rígido, que não esteja no eixo de rotação, terá velocidade relativa tangente a alguma circunferência com centro em a, no plano de rotação. O ângulo  $d\theta$ , que se deslocam todos esses pontos, durante um intervalo  $dt$ , deverá ser exatamente o mesmo, para garantir que a distância entre todos eles permanece constante. A velocidade angular do corpo rígido é:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (3.22)$$

Como tal, o valor da velocidade relativa de b, ou de qualquer outro ponto, é igual à sua distância até o eixo de rotação, vezes a velocidade angular do



**Figura 3.10.:** Movimento dos pontos b e c no plano de rotação, em relação ao ponto a.

corpo:

$$v_{b/a} = R_b \omega \quad (3.23)$$

onde  $R_b$  é a distância desde o ponto b até o eixo de rotação que passa pelo ponto a.

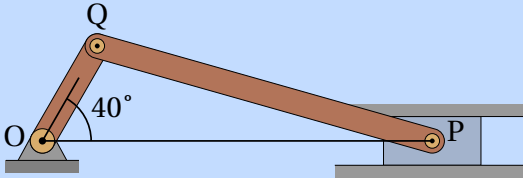
O movimento do corpo rígido é então a sobreposição do movimento dum ponto qualquer nele (no nosso caso a), mais rotação em torno de um eixo que passa por esse ponto. Se em vez do ponto a fosse escolhido outro ponto d, o eixo de rotação teria exatamente a mesma direção, mas passaria por d. A velocidade angular seria exatamente a mesma do que em relação ao ponto a, e o movimento do corpo seria a sobreposição do movimento do ponto d, mais rotação em torno do eixo de rotação que passa por d. Em diferentes instantes a direção do eixo de rotação, e a velocidade angular, podem ser diferentes, mas a cada instante o eixo e a velocidade angular são os mesmos, independentemente do ponto usado como referência. Resumindo,

*A cada instante existe uma direção no espaço (eixo de rotação) tal que se a posição relativa entre dois pontos num corpo rígido for paralela a essa direção, as suas velocidades serão iguais. A velocidade relativa entre dois pontos num corpo rígido, dividida*

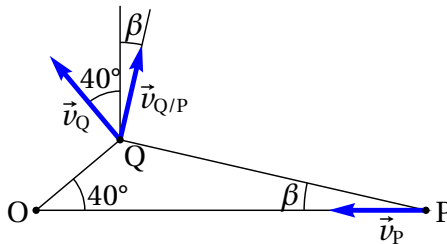
pela distância entre um deles e o eixo de rotação que passa pelo outro, é igual à velocidade angular  $\omega$  do corpo nesse instante.

### Exemplo 3.2

A figura mostra um mecanismo **biela-manivela**, usado para transformar movimento circular em movimento retilíneo ou vice-versa. A manivela é a barra OQ, que roda à volta de um eixo fixo no ponto O, e a biela é a barra PQ, que liga a manivela a um pistão P que só pode deslocar-se na horizontal. No instante em que a manivela faz um ângulo de  $40^\circ$  com a horizontal, na posição que mostra a figura, a velocidade do ponto P é 60 cm/s, para a esquerda. Determine as velocidades angulares da biela e da manivela, nesse instante, sabendo que  $\overline{OQ}$  é igual a 7.5 cm e  $\overline{PQ}$  é igual a 20 cm.



**Resolução.** Como o ponto O está fixo, a velocidade do ponto Q é a mesma velocidade de Q relativa a O, que deve ser perpendicular à barra OQ, porque os dois pontos fazem parte da manivela, que é um corpo rígido. Como tal, a velocidade  $\vec{v}_Q$  do ponto Q faz um ângulo de  $40^\circ$  com a vertical, como mostra a figura seguinte:



Como o ponto Q também faz parte da biela PQ, a velocidade  $\vec{v}_{Q/P}$ , do ponto Q, relativa ao ponto P, deverá ser perpendicular ao segmento  $\overline{PQ}$ . O ângulo  $\beta$  que faz com a vertical é o mesmo ângulo que o segmento  $\overline{PQ}$  faz com a horizontal. Esse ângulo pode ser determinado usando a lei dos senos no

triângulo OPQ:

$$\sin \beta = \frac{\overline{OQ} \sin 40^\circ}{\overline{PQ}} = \frac{7.5 \sin 40^\circ}{20} = 0.2410$$

Como tal,  $\beta = 13.95^\circ$ . Os valores das velocidades do ponto Q, relativas aos pontos O e P, serão iguais às velocidades angulares das barras, vezes os seus comprimentos (usaremos distâncias em cm e velocidades em cm/s):

$$v_Q = 7.5 \omega_m \quad v_{Q/P} = 20 \omega_b$$

onde  $\omega_m$  é a velocidade angular da manivela e  $\omega_b$  é a velocidade angular da biela. Observe-se que na figura acima, estamos a admitir que  $\omega_m$  é no sentido oposto aos ponteiros do relógio e  $\omega_b$  é no sentido dos ponteiros do relógio.

Em coordenadas cartesianas, com eixo dos  $x$  horizontal, de esquerda para direita, e eixo dos  $y$  vertical, de baixo para cima, as componentes da velocidade do ponto Q são:

$$\vec{v}_Q = 7.5 \omega_m (-\sin 40^\circ \hat{i} + \cos 40^\circ \hat{j}) = \omega_m (-4.82 \hat{i} + 5.75 \hat{j}) \quad (3.24)$$

Mas a velocidade do ponto Q pode também ser calculada somando a velocidade do ponto P,  $\vec{v}_P = -60 \hat{i}$ , mais a velocidade de Q relativa a P:

$$\begin{aligned} \vec{v}_Q &= -60 \hat{i} + 20 \omega_b (\sin \beta \hat{i} + \cos \beta \hat{j}) \\ &= (4.82 \omega_b - 60) \hat{i} + 19.4 \omega_b \hat{j} \end{aligned} \quad (3.25)$$

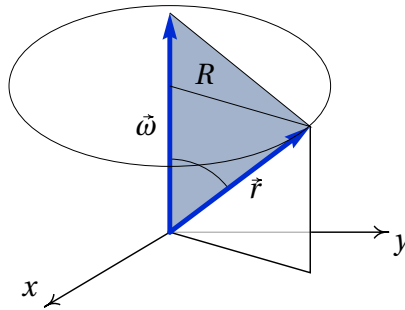
Igualando as componentes das duas expressões 3.24 e 3.25, encontram-se as velocidades angulares:

$$\omega_m = 9.603 \text{ s}^{-1} \quad \omega_b = 2.843 \text{ s}^{-1}$$

Observe-se que as duas velocidades angulares obtidas resolvendo as equações têm sinais positivos, o que indica que os sentidos que admitimos na figura estão corretos. Podíamos ter admitido sentidos opostos, mudando na figura o sentido das velocidades de Q relativas a O e P, e o resultado teria dado valores negativos para as velocidades angulares, indicando que os sentidos não eram os corretos.

### 3.5. Vetores velocidade angular e aceleração angular

É conveniente definir a velocidade angular como um vetor  $\vec{\omega}$ , na direção do eixo de rotação, tal como se mostra na figura 3.11. O vetor  $\vec{\omega}$  tem módulo igual ao valor absoluto da velocidade angular,  $\omega$ , direção paralela ao eixo de rotação e sentido segundo a regra da mão direita para a rotação, ou seja, imaginando um sistema de eixos cartesianos em que o eixo dos  $z$  aponta na direção e sentido de  $\vec{\omega}$ , o corpo rígido roda de forma a que o eixo dos  $x$  se aproxime do eixo dos  $y$ . Também pode fechar-se o punho direito e estender o dedo polegar apontando no sentido de  $\vec{\omega}$  e o sentido de rotação é o sentido em que se curvam os outros 4 dedos.



**Figura 3.11.:** Vetores velocidade angular e posição.

A vantagem de usar um vetor é que  $\vec{\omega}$  contém a informação da velocidade angular  $\omega$ , direção do eixo de rotação e sentido da rotação. A equação 3.23 pode ser escrita de forma vetorial. Se  $\vec{r}$  for a posição relativa de um ponto qualquer no corpo, em relação ao ponto de referência, a distância  $R$  desde o ponto até o eixo de rotação que passa pelo ponto de referência, é igual a  $r \sin \phi$ , onde  $\phi$  é o ângulo entre os vetores  $\omega$  e  $\vec{r}$  tal como mostra a figura 3.11. O módulo da velocidade relativa do ponto é então:

$$|v| = |\omega| r \sin \phi \quad (3.26)$$

O vetor velocidade relativa,  $\vec{v}$ , do ponto na posição relativa  $\vec{r}$  é perpendicular aos dois vetores  $\vec{\omega}$  e  $\vec{r}$  e o seu módulo é igual ao produto dos módulos desses dois vetores, vezes o seno do ângulo entre eles. Essa é precisamente a definição do produto vetorial entre os vetores  $\vec{\omega}$  e  $\vec{r}$ , que vamos denotar com o operador  $\times$ . A velocidade é então o produto da vetorial da velocidade



angular vezes o vetor posição:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (3.27)$$

Observe-se que, por definição, o produto na equação 3.27 é um vetor no sentido da regra da mão direita, desde o primeiro vector,  $\vec{\omega}$ , até o segundo,  $\vec{r}$ .

O movimento circular dum ponto, em relação ao ponto de referência, com raio  $R$  e velocidade angular  $\omega$ , implica aceleração tangencial  $R\dot{\omega}$  e aceleração centrípeta  $R^2\omega$ . Mas a o vetor aceleração relativa pode também ser obtido derivando o vetor velocidade relativa (equação 3.27):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (3.28)$$

A derivada do vetor velocidade angular é outro vetor  $\vec{\alpha}$ , chamado **aceleração angular**, e a derivada do vetor posição relativa é o vetor velocidade relativa, dado pela equação 3.27. A expressão vetorial da aceleração relativa é:

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (3.29)$$

O primeiro termo é a aceleração tangencial e o segundo termo a aceleração normal ou centrípeta.

### 3.5.1. Produto vetorial

O produto vetorial entre quaisquer dois vetores  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  é outro vetor  $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ , com módulo igual ao produto dos módulos de  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  e o seno do ângulo entre eles. Em particular, o módulo do produto vetorial  $\vec{\omega} \times \vec{r}$  é  $|\omega| r \sin\phi$ . A figura 3.11 mostra o ângulo  $\phi$  entre os vetores; note-se que  $\sin\phi$  é sempre positivo, porque  $\phi$  está entre 0 e  $\pi$ . O produto  $r \sin\phi$  é igual a  $R$ , já que essa distância é medida no plano de rotação, que é perpendicular ao vetor  $\vec{\omega}$ . Assim sendo, o módulo de  $\vec{\omega} \times \vec{r}$  é igual a  $R|\omega|$ , que é igual ao módulo de  $\vec{v}$ .

A direção de  $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$  é perpendicular ao plano formado por  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ , seguindo a regra da mão direita de  $\vec{A}$  para  $\vec{B}$ : com o punho da mão direita fechado e o polegar estendido, se os outros quatro dedos rodam no sentido de  $\vec{A}$  para  $\vec{B}$ , então o dedo polegar indica o sentido de  $\vec{C}$ . A figura 3.11 mostra o plano formado por  $\vec{\omega}$  e  $\vec{r}$ , que é perpendicular ao plano  $xy$ , de

modo que a direção de  $\vec{\omega} \times \vec{r}$  é paralela ao plano  $xy$  e perpendicular ao plano de  $\vec{\omega}$  e  $\vec{r}$ ; o sentido de  $\vec{\omega} \times \vec{r}$  obtém-se pela regra da mão direita de  $\vec{\omega}$  para  $\vec{r}$ .

O produto vetorial não é comutativo; ou seja,  $\vec{A} \times \vec{B}$  e  $\vec{B} \times \vec{A}$  não são iguais porque têm o mesmo módulo e a mesma direção, mas sentidos opostos. Sendo o ângulo de um vetor consigo próprio zero, o produto  $\vec{A} \times \vec{A}$  é nulo. Em particular,  $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$ . O produto vetorial de dois versores perpendiculares é outro versor perpendicular ao plano deles; é fácil conferir que  $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$ ,  $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$  e  $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$ . Usando estas propriedades e a lei distributiva do produto vetorial, obtém-se uma expressão para o produto  $\vec{A} \times \vec{B}$  em função das componentes cartesianas dos vetores

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k} \end{aligned} \quad (3.30)$$

resultado esse que pode ser escrito de forma mais compacta através de um determinante:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (3.31)$$

Observe-se que na figura 3.11 o triângulo sombreado tem base igual a  $|\omega|$  e altura igual a  $R$ ; assim sendo, a sua área é igual a metade do módulo do produto vetorial da velocidade angular pelo vetor posição:  $|\vec{\omega} \times \vec{r}|/2 = R|\omega|/2$ . Em geral,

*A área do triângulo formado por dois vetores com origem comum é igual a metade do módulo do produto vetorial dos vetores.*

### 3.5.2. Rotação plana

Quando a direção do eixo de rotação permanece sempre igual, diz-se que a rotação do corpo rígido é plana. Nesse caso o plano de rotação é sempre o mesmo e pode ser definido como o plano  $xy$ . Como tal, o vetor velocidade angular é:

$$\vec{\omega} = \omega \hat{k} \quad (3.32)$$

em que  $\omega$  pode depender do tempo, e a sua derivada é  $\alpha = \dot{\omega}$ . O vetor aceleração angular estará também na mesma direção do eixo de rotação:

$$\vec{\alpha} = \alpha \hat{k} \quad (3.33)$$

O vetor posição relativa de um ponto qualquer no corpo é  $\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$ . Os produtos vetoriais nas equações 3.27 e 3.29, em coordenadas cartesianas (equação 3.31), conduzem às seguintes expressões para a velocidade relativa e as componentes tangencial e normal da aceleração relativa:

$$\vec{v} = \omega (x \hat{j} - y \hat{i}) \quad (3.34)$$

$$\vec{a}_t = \alpha (x \hat{j} - y \hat{i}) \quad \vec{a}_n = -\omega^2 (x \hat{i} + y \hat{j}) \quad (3.35)$$

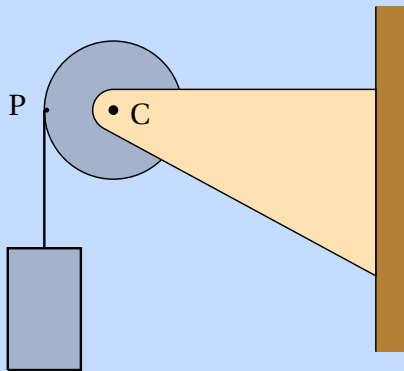
Como tal, a coordenada  $z$  do ponto não interessa. Basta apenas saber a posição da sua projeção no plano  $xy$  (plano de rotação):

$$\vec{R} = x \hat{i} + y \hat{j} \quad (3.36)$$

e o módulo desse vetor,  $R$ , é a distância desde o ponto até o eixo de rotação.

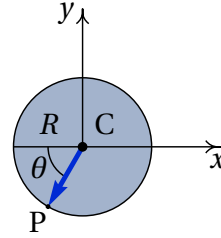
### Exemplo 3.3

Cola-se um extremo de um fio numa roldana com raio de 5 cm, enrolando-o e pendurando um bloco do outro extremo (ver figura). No instante inicial o bloco e a roldana estão em repouso e o ponto P da roldana encontra-se à mesma altura do seu centro C. O bloco começa a descer, com aceleração constante de valor igual a  $g/4$ . Determine a velocidade e a aceleração do ponto P, dois segundos após o instante inicial.



**Resolução.** O eixo de rotação da roldana é perpendicular ao plano da figura, e permanece fixo. Como tal, a rotação da roldana é uma rotação plana e o plano de rotação é o plano da figura, que designaremos de plano  $xy$ .

O ponto de referência pode ser qualquer ponto na roldana, mas como os pontos no eixo da roldana estão em repouso, neste caso é conveniente escolher como ponto de referência o ponto C no centro da roldana. Em função dos eixos definidos na figura ao lado, a posição do ponto P, após a roldana ter rodado um ângulo  $\theta$  desde a posição inicial, é:



$$\vec{R}_P = -R (\cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}) \quad (3.37)$$

Para calcular a velocidade do ponto P, é necessária também a velocidade angular, que pode ser obtida a partir do valor da velocidade do bloco. Para encontrar uma expressão para o valor da velocidade do bloco, integra-se a equação  $\dot{v}_b = a_t$

$$\dot{v}_b = \frac{g}{4} \quad \Rightarrow \quad v_b = \frac{g t}{4}$$

Como todos os pontos do fio têm esse mesmo valor da velocidade e os pontos da superfície acompanham o movimento do fio, esse será também o valor da velocidade dos pontos na superfície da roldana e o valor da velocidade angular da roldana será  $v_b/R = g t/(4R)$ . A rotação é no sentido anti-horário (velocidade angular positiva), com velocidade angular:

$$\omega = \frac{g t}{4R}$$

A velocidade do ponto P obtém-se a partir da equação 3.34 para rotação plana (ou simplesmente derivando a expressão 3.37, tendo em conta que a derivada de  $\theta$  é  $\omega$ ):

$$\vec{v}_P = \frac{g t}{4} (\sin\theta \hat{i} - \cos\theta \hat{j})$$

Observe-se que a equação 3.34 dá a velocidade relativa do ponto, mas neste caso, em que o ponto de referência está em repouso, a velocidade relativa é a mesma velocidade absoluta.

A aceleração angular é a derivada da velocidade angular em ordem ao tempo,

$$\alpha = \frac{g}{4R}$$

e as componentes da aceleração do ponto P obtêm-se a partir da equação 3.35 (ou derivando a expressão da velocidade do ponto P):

$$\vec{a}_t = \frac{g}{4}(\sin\theta \hat{i} - \cos\theta \hat{j}) \quad \vec{a}_n = \frac{g^2 t^2}{16R}(\cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j})$$

Para encontrar a expressão para  $\theta$  em função do tempo, integra-se a equação  $\dot{\theta} = \omega$ , com  $t_i = 0$  e  $\theta_i = 0$

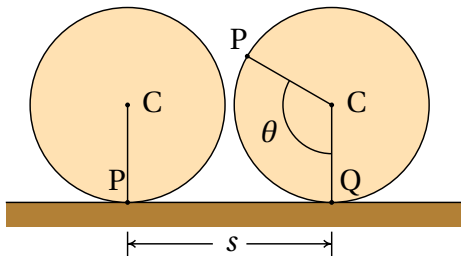
$$\dot{\theta} = \frac{g t}{4R} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{g t^2}{8R}$$

substituindo os valores de  $t = 2$ ,  $R = 0.05$  e  $g = 9.8$ , em unidades SI, obtêm-se a velocidade e a aceleração nesse instante,

$$\vec{v}_P = -2.81 \hat{i} + 4.015 \hat{j} \quad \vec{a}_P = -394.8 \hat{i} - 273.3 \hat{j}$$

### 3.6. Movimentos de translação e de rotação dependentes

Numa roda em movimento sobre uma superfície, sem derrapar, o ângulo de rotação e o deslocamento da roda estão relacionados. Na figura 3.12, uma roda de raio  $R$  desloca-se para a direita, sobre uma superfície, sem derrapar.



**Figura 3.12.:** Roda que se desloca rodando sem derrapar.

Num instante inicial um ponto P da roda está em contacto com a superfície; após alguns instantes, a roda rodou um ângulo  $\theta$  e o centro da roda percorreu uma distância  $s$ . O arco de circunferência  $R\theta$  deverá ser igual à distância percorrida  $s$ , já que todos os pontos nesse arco estiveram em contacto com pontos da superfície.

$$s = R\theta \tag{3.38}$$

derivando os dois lados da equação, obtém-se a relação entre a velocidade do centro C e a velocidade angular,

$$v = R\omega \quad (3.39)$$

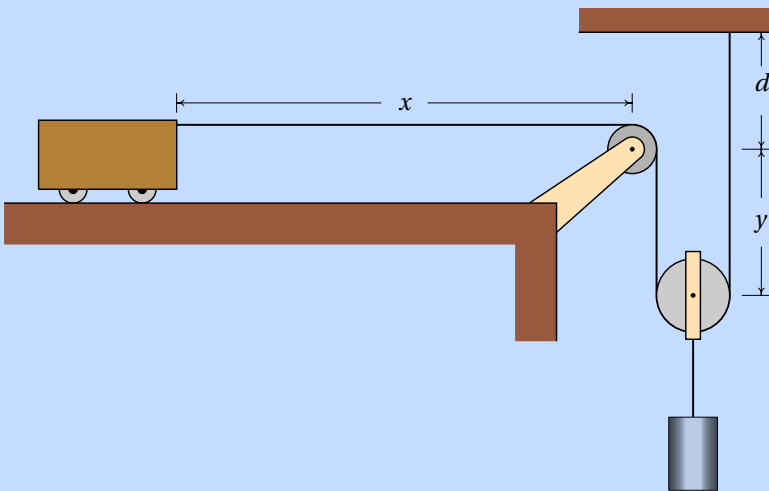
e derivando novamente, observa-se que a aceleração de tangencial de C é igual ao produto do raio pela aceleração angular:

$$a_t = R\alpha \quad (3.40)$$

No caso das roldanas, se a roldana roda sem o fio derrapar sobre a sua superfície, os pontos na superfície da roldana terão a mesma velocidade do fio e subtraindo a velocidade do centro da roldana obtém-se a velocidade do ponto na superfície da roldana, relativa à roldana; o valor dessa velocidade relativa, dividido pelo raio da roldana, deverá ser igual à velocidade angular da roldana.

#### Exemplo 3.4

A roldana fixa no sistema da figura tem raio de 3 cm e a roldana móvel tem raio de 5 cm. Calcule o valor da velocidade do carrinho e das velocidades angulares das roldanas, no instante em que o cilindro desce com velocidade de valor 1.5 m/s, admitindo que o fio não derrapa nas roldanas.



**Resolução.** Este sistema já foi estudado na secção 2.5 onde mostrou-se que o valor da velocidade do carrinho é o dobro da velocidade do cilindro. Assim sendo, o valor da velocidade do carrinho é 3 m/s.

Na roldana fixa, o valor da velocidade dos pontos na superfície será o mesmo que no carrinho, 3 m/s e, como tal, o valor da velocidade angular da roldana fixa é,

$$\omega_1 = \frac{3}{0.03} = 100 \text{ s}^{-1}$$

O centro da roldana móvel também desce a 1.5 m/s. No ponto da sua superfície, no lado direito, o fio está estático e, assim sendo, esse ponto desloca-se para cima, em relação ao centro, com velocidade de valor 1.5 m/s. O ponto na superfície da roldana, no lado esquerdo, desloca-se para baixo, com a velocidade do carrinho, 3 m/s, de modo que em relação ao centro da roldana desloca-se para baixo, com velocidade de valor 1.5 m/s. O valor da velocidade angular da roldana móvel é,

$$\omega_2 = \frac{1.5}{0.05} = 30 \text{ s}^{-1}$$

A parte do fio no lado direito da roldana móvel, que permanece estático, pode ser considerado como uma superfície vertical em que a roldana roda como uma roda sobre uma superfície. O valor da velocidade do centro da roda, que é igual ao valor da velocidade do cilindro, é igual ao produto do valor da velocidade angular da roda pelo raio da roda. O valor da velocidade do ponto mais à esquerda na roda, que é o valor da velocidade do carrinho, é o produto do valor da velocidade angular da roda pelo diâmetro da roda. Essa é outra forma de explicar porque o valor da velocidade do carrinho é o dobro do valor da velocidade do cilindro, porque o diâmetro da roda é o dobro do seu raio.

## Perguntas

1. No intervalo de tempo  $0 < t < 1$ , o valor da velocidade de um objeto em função do tempo verifica a expressão  $v = 5 + 3t^2 + 2t^3$ . Se a trajetória do objeto for uma reta, qual das cinco funções na lista poderá ser a expressão correta para o valor da aceleração?

A.  $a = 5 + 6t + 6t^2$

D.  $a = 5 + 6t$

B.  $a = 5$

E.  $a = 6t + 6t^2$

C.  $a = 6t$

2. Um objeto com movimento circular tem aceleração angular com valor constante  $\alpha = 3/\pi$  radiano/s<sup>2</sup>. Se o objeto parte do repouso, quanto tempo, em segundos, demorará a completar as primeiras 3 voltas?

A.  $\pi$

C.  $3\pi$

E.  $5\pi$

B.  $2\pi$

D.  $4\pi$

3. Um ponto num objeto descreve numa trajetória curva, com velocidade de valor constante. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A. A aceleração é perpendicular à trajetória.

B. O valor da aceleração é constante.

C. A aceleração é tangente à trajetória.

D. A aceleração é constante.

E. A aceleração é nula.

4. Um projétil é lançado com velocidade inicial com valor  $v_i$  e direção inclinada que faz um ângulo  $\theta$  com o plano horizontal. Determine o raio de curvatura da trajetória parabólica no instante inicial.

A.  $\frac{v_i^2 \tan \theta}{g}$

D.  $\frac{v_i^2}{g \sin \theta}$

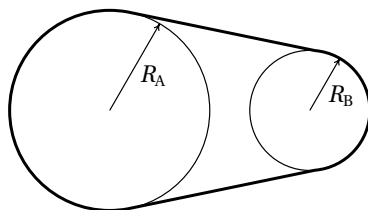
B.  $\frac{v_i^2 \sin \theta}{g}$

E.  $\frac{v_i^2}{g \cos \theta}$

C.  $\frac{v_i^2 \cos \theta}{g}$



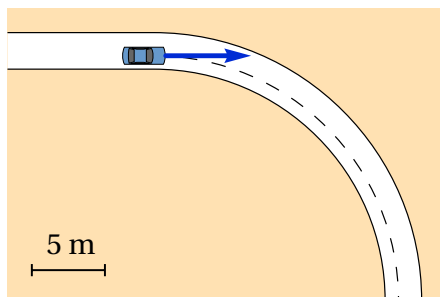
5. O movimento circular de uma roda de raio  $R_A$  é transmitido para outra roda de raio  $R_B$ , através de uma correia que se desloca com as rodas, sem derrapar. Qual é a relação entre os valores das velocidades angulares  $\omega_A$  e  $\omega_B$  de ambas rodas?



- A.  $R_A\omega_A = R_B\omega_B$       C.  $R_A^2\omega_A = R_B^2\omega_B$       E.  $R_B^2\omega_A = R_A^2\omega_B$   
 B.  $\omega_A = \omega_B$       D.  $R_B\omega_A = R_A\omega_B$

## Problemas

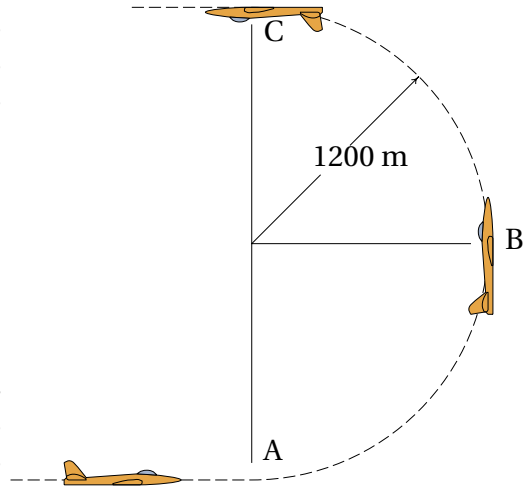
1. No intervalo de tempo  $0 \leq t \leq 10$ , os valores da velocidade e da aceleração de uma partícula com movimento em 3 dimensões são dadas pelas funções:  $v = t\sqrt{4t^2 + 9}$  e  $a = \sqrt{16t^2 + 9}$  (unidades SI). Encontre, no mesmo intervalo de tempo, as expressões para:
- A componente tangencial da aceleração.
  - A componente normal da aceleração.
  - O raio de curvatura.
2. Um motorista entra numa curva a 72 km/h, e trava, fazendo com que o valor da velocidade diminua a uma taxa constante de 4.5 km/h cada segundo. Observando a figura, faça uma estimativa do raio de curvatura da estrada e calcule o valor da aceleração do automóvel 4 segundos após ter iniciado a travagem.



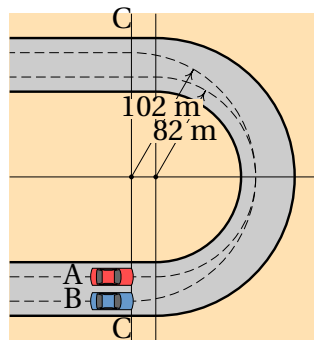
3. A equação da trajetória de um objeto é:  $\vec{r} = 8 \cos^2(2t) \hat{i} + 4 \sin(4t) \hat{j}$  (unidades SI e ângulos em radianos).

- (a) Demonstre que o movimento do objeto é circular uniforme.
- (b) Determine o valor da velocidade angular do objeto e o seu período.
- (c) Encontre a posição do centro da trajetória circular.

4. Um piloto de corridas de aviões executa um *loop* vertical, igual a meia circunferência de raio 1200 m. O valor da velocidade no ponto A, no início do loop, é 160 m/s e no ponto C, no fim do loop, é 140 m/s. Calcule o valor da aceleração no ponto B, no meio do loop, admitindo que a aceleração tangencial permanece constante durante o loop (observe que também é negativa).



5. Dois carros A e B passam por uma curva usando trajetórias diferentes. A figura mostra a curva delimitada pela reta C. O carro B faz um percurso semicircular com raio de 102 m; o carro A avança uma distância em linha reta, a seguir segue um semicírculo com raio 82 m e termina com outro trajeto em linha reta. Os dois carros deslocam-se à velocidade máxima que podem ter para conseguir fazer a curva, que para o tipo de pneus usados corresponde à velocidade que produz uma aceleração normal de  $0.8g$ , onde  $g$  é a aceleração da gravidade. Calcule o tempo que demora cada um dos carros a fazer a curva.

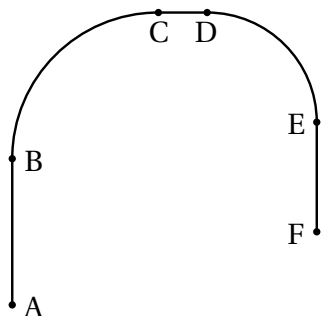


6. (a) Calcule a área do triângulo com vértices nos pontos A, B e C, com coordenadas cartesianas  $A = (3, 5, 4)$ ,  $B = (-1, 2, 1)$  e  $C = (2, -2, 2)$ .  
 (b) Demonstre a **Lei dos senos**, para um triângulo com lados de comprimentos  $a$ ,  $b$  e  $c$ ,

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

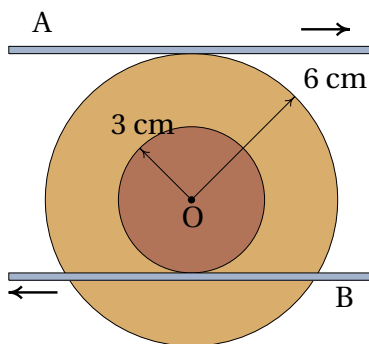
em que  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são os ângulos opostos aos lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

7. Uma partícula segue a trajetória que mostra a figura, partindo do repouso em A e aumentando a velocidade com aceleração constante até o ponto B. Desde B até E mantém velocidade constante de 10 m/s e a partir de E começa a abrandar, com aceleração constante, até parar no ponto F. A distância AB é 60 cm, CD é 20 cm e EF é 45 cm; o raio do arco BC é 60 cm e o raio do arco DE é 45 cm. Determine:

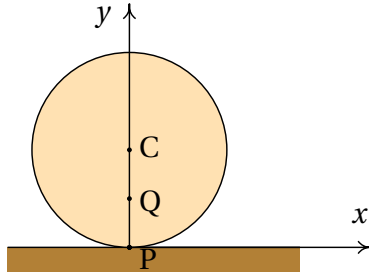


- (a) O módulo da aceleração da partícula em cada um dos trajetos AB, BC, CD, DE e EF.  
 (b) O tempo total do movimento desde A até F e a velocidade média nesse percurso.

8. A roda na figura tem duas partes com raios de 3 cm e 6 cm, que estão em contacto com duas barras horizontais A e B. A barra A desloca-se para a direita, com valor da velocidade de 10 m/s e a barra B desloca-se para a esquerda com valor da velocidade de 35 m/s, enquanto a roda mantém o contacto com as duas barras, sem derrapar. Determine para que lado se desloca o centro O da roda e calcule os valores da velocidade do ponto O e da velocidade angular da roda.

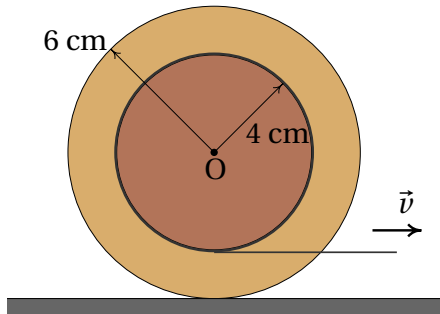


9. Uma roda com 20 cm de raio desloca-se, sem derrapar, sobre uma superfície plana, ao longo do eixo dos  $x$ . No instante  $t = 0$  o centro da roda encontra-se em  $x = 0$  e  $y = 20$  cm e os pontos P e Q da roda são os pontos que estão em  $x = 0$  com  $y = 0$  e  $y = 10$  cm. O valor da velocidade do centro da roda é 2 m/s, constante. (a) Calcule quanto tempo demora a roda a dar duas voltas completas. (b) Represente os gráficos das trajetórias dos pontos P e Q durante o tempo que a roda demora a dar duas voltas.

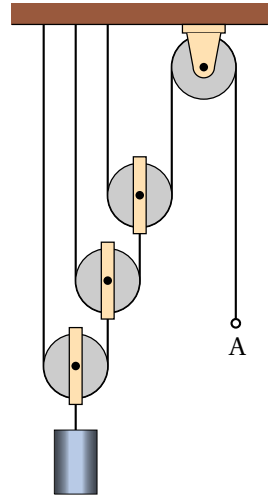


10. Um cilindro com raio de 4 cm está colado a uma roda com 6 cm de raio que se encontra sobre uma superfície horizontal plana, tal como mostra a figura. Uma corda foi enrolada à volta do cilindro e está a ser puxada horizontalmente para a direita, com velocidade constante  $\vec{v}$  de valor 2.5 cm/s. O movimento da corda faz rodar a roda sobre a superfície horizontal, sem derrapar.

- (a) Determine o valor da velocidade angular da roda.  
 (b) Diga em que sentido se desloca o ponto O, no eixo da roda e do cilindro, e determine o valor da sua velocidade.  
 (c) Determine quantos centímetros de corda são enrolados à volta do cilindro a cada segundo.

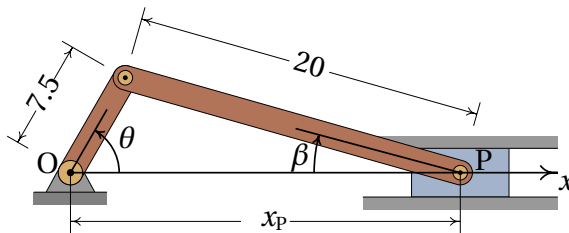


11. Na máquina representada na figura, todas as roldanas têm raio igual a 5 cm. Determine os valores das velocidades angulares das quatro roldanas, quando o anel A for puxado para baixo com velocidade de valor constante 2 m/s.



12. A figura mostra o mecanismo biela-manivela analisado no exemplo 3.2 (as distâncias estão em cm). Observe que há três variáveis que mudam em função do tempo:  $x_p$ ,  $\theta$  e  $\beta$ ; e as suas derivadas são a velocidade do pistão e as velocidades angulares da manivela e da biela:  $v_p$ ,  $\omega_m$  e  $\omega_b$ . Mas basta uma dessas 3 variáveis para encontrar as outras duas. Outra forma diferente de resolver o mesmo problema é a seguinte:

- (a) Encontre uma expressão para  $x_p$  que dependa apenas do ângulo  $\theta$ . Derive essa expressão para obter a velocidade angular da manivela, em função da velocidade do pistão e do ângulo  $\theta$ .
- (b) Encontre a relação entre os senos dos ângulos  $\theta$  e  $\beta$ . Derive essa relação e substitua o cosseno de  $\beta$  em termos do ângulo  $\theta$ , encontrando assim uma expressão para a velocidade angular da biela, em função da velocidade angular da manivela e do ângulo  $\theta$ .
- (c) Substitua os valores do exemplo 3.2,  $\theta = 40^\circ$  e  $v_p = 60$  cm/s, nos resultados das duas alíneas anteriores, para conferir os resultados obtidos no exemplo.

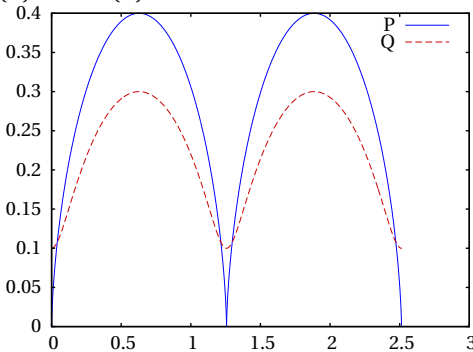


## Respostas

**Perguntas:** 1. E. 2. B. 3. A. 4. E. 5. A.

### Problemas

1. (a)  $\frac{8t^2 + 9}{\sqrt{4t^2 + 9}}$  (b)  $\frac{6t}{\sqrt{4t^2 + 9}}$  (c)  $\frac{t}{6}(4t^2 + 9)^{3/2}$
2. Com raio igual a 16 m, o valor da aceleração é aproximadamente 14 m/s<sup>2</sup>
3. (a) O cálculo do módulo do vetor velocidade dá um valor constante  $v = 16$  e as componentes obtidas para a aceleração são  $a_t = 0$  e  $a_n = 64$ . Assim sendo, o movimento é uniforme, porque o valor da velocidade permanece constante e circular, porque o movimento é num plano e o raio de curvatura,  $v^2/a_n$ , é constante. (b)  $\omega = 4$  rad/s,  $T = \pi/2$  (segundos). (c) coordenadas (4, 0).
4. 18.85 m/s<sup>2</sup>
5. 11.74 s para o carro A e 11.33 s para o carro B.
6. (a) 14.79 (b) Os três produtos ( $ab \sin \gamma$ ), ( $ac \sin \beta$ ) e ( $bc \sin \alpha$ ) são todos iguais ao dobro da área do triângulo; igualando cada par de produtos demonstra-se cada uma das igualdades.
7. (a) 83.33 m/s<sup>2</sup> em AB, 111.11 m/s<sup>2</sup> em EF, 166.67 m/s<sup>2</sup> em BC e 222.22 m/s<sup>2</sup> em DE. (b) 0.395 s e 7.34 m/s.
8. Para a esquerda, com  $v_o = 20$  m/s e  $\omega = 500$  s<sup>-1</sup>.
9. (a) 1.26 s (b)



10. (a) 1.25 s<sup>-1</sup>, no sentido dos ponteiros do relógio. (b) Para a direita com velocidade de valor 7.5 cm/s. (c) 5 cm (a corda enrola-se no cilindro, porque este roda no sentido dos ponteiros do relógio).

11. De esquerda para direita,  $5 \text{ s}^{-1}$ ,  $10 \text{ s}^{-1}$ ,  $20 \text{ s}^{-1}$  e  $40 \text{ s}^{-1}$ .

12. (a)  $x_p = 7.5 \cos \theta + \sqrt{400 - 56.25 \sin^2 \theta}$

$$\omega_m = - \frac{v_p}{7.5 \sin \theta + \frac{56.25 \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{400 - 56.25 \sin^2 \theta}}}$$

(b)  $3 \sin \theta = 8 \sin \beta$        $\omega_b = \frac{3 \omega_m \cos \theta}{8 \sqrt{1 - \frac{9}{64} \sin^2 \theta}}$