

7. Sistemas dinâmicos



No estudo de um sistema dinâmico é importante determinar a existência de posições de equilíbrio. Os acrobatas na fotografia encontram-se numa situação de equilíbrio estável: se a bicicleta se inclinar lateralmente, o peso do acrobata pendurado por baixo faz com que o sistema se incline no sentido oposto, regressando à posição de equilíbrio. Se o acrobata na bicicleta não tivesse o segundo acrobata pendurado, a sua situação de equilíbrio seria instável: se a bicicleta se inclinasse lateralmente, o seu peso mais o do acrobata faziam aumentar ainda mais a inclinação, afastando a bicicleta da posição de equilíbrio.

7.1. Equações diferenciais

As equações cinemáticas são equações diferenciais ordinárias. Uma equação diferencial ordinária —ou de forma abreviada, EDO— é qualquer expressão que relaciona uma função, por exemplo $x(t)$ e as suas derivadas: \dot{x} , \ddot{x} , etc. Por exemplo: $x\ddot{x} - 2t = \dot{x}$; neste caso t é a variável independente e x a variável que depende de t . Muitos problemas de ciência e engenharia conduzem a equações diferenciais ordinárias que é necessário resolver para encontrar a função, no exemplo anterior $x(t)$. Existem equações que aparecem em diversas áreas diferentes; por exemplo, a equação do oscilador harmónico simples analisada no capítulo 6 é da forma geral $\ddot{x} = -Cx$, onde C é uma constante positiva; nos problemas de outras áreas científicas em que aparecem equações similares, o comportamento do sistema pode ser analisado por analogia com o movimento de um corpo ligado a uma mola elástica.

7.1.1. Equações de primeira ordem

Uma EDO é de primeira ordem se a única derivada que aparece na equação é de primeira ordem. Se a variável independente é t e a variável dependente x , esse tipo de equações podem ser escritas na forma geral

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{7.1}$$

onde $f(x, t)$ é uma expressão com x e t . Todas as equações diferenciais que foram resolvidas no capítulo 1, pelo método de separação de variáveis, são dessa forma. Mas existem outras equações de primeira ordem que não podem ser resolvidas por esse método; por exemplo, na equação $\dot{x} = t^2 - x^2$ não é possível separar as variáveis t e x .

Uma EDO admite muitas soluções diferentes, que dependem dos valores iniciais (t_0, x_0) . Nos exemplos resolvidos no capítulo 1, para diferentes limites de integração obtinham-se diferentes soluções.

Uma EDO de primeira ordem com a forma geral $\dot{x} = f(x)$ diz-se **autónoma**, porque a variável independente t não aparece explicitamente no lado direito. Nesse caso, a solução x é ainda uma função do tempo mas acontece que as funções obtidas com as condições iniciais (t_0, x_0) , (t_1, x_0) , (t_2, x_0) , etc. são a mesma função mas deslocada no eixo dos t . Diz-se que a forma como o sistema “evolui” a partir do valor inicial x_0 é igual, independentemente do instante em que o sistema começa a evoluir.

Em termos físicos, um sistema autónomo é um sistema que é regido sempre pelas mesmas leis físicas: a altura $x(t)$ de um corpo em queda livre desde um ponto com altura x_0 diminui sempre da mesma forma, em quanto não mude o valor de g ou deixe de existir atração gravitacional.

7.2. Sistemas de equações diferenciais autónomas

Considere-se agora o caso em que existem duas funções independentes $x_1(t)$ e $x_2(t)$, que dependem do tempo e que são definidas por duas equações diferenciais autónomas de primeira ordem:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \quad (7.2)$$

Por exemplo, o sistema:

$$\dot{x}_1 = 4 - x_1^2 - x_2 \quad \dot{x}_2 = x_2 - x_1 \quad (7.3)$$

Pretende-se encontrar as funções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ a partir de valores conhecidos de $x_1(t_0)$ e $x_2(t_0)$ num instante inicial t_0 . Pode visualizar-se o problema num gráfico em que se colocam x_1 e x_2 em dois eixos perpendiculares, tal como na figura 7.1. Dois valores iniciais $x_1(t_0)$ e $x_2(t_0)$, num instante inicial, definem um ponto nesse plano e nos instantes seguintes os valores de $x_1(t)$ e $x_2(t)$ mudam, fazendo com que o ponto se desloque no plano ao longo de uma curva.

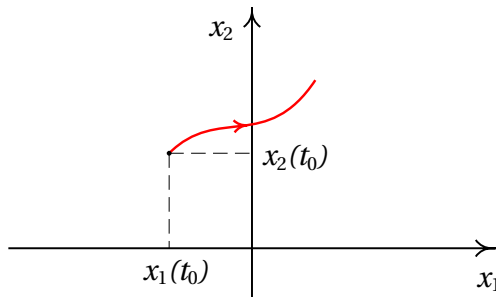


Figura 7.1.: Espaço de fase de um sistema autónomo com duas variáveis.

O plano com os eixos x_1 e x_2 chama-se **espaço de fase** e em cada instante t , o ponto do espaço de fase definido pelas coordenadas $(x_1(t), x_2(t))$ denomina-se o **estado** do sistema nesse instante. As duas variáveis x_1 e x_2 são as **variáveis de estado** e a curva representada na figura 7.1, que mostra a variação das variáveis de estado a partir de um estado inicial, é uma **curva de evolução** do sistema.

Qualquer ponto do espaço de fase pode ser o estado inicial do sistema $(x_1(t_0), x_2(t_0))$. Os valores de $f_1(x_1, x_2)$ e $f_2(x_1, x_2)$ nesse ponto estão bem definidos e determinam como aumentam as variáveis de estado x_1 e x_2 nesse ponto. A expressão f_1 , derivada de x_1 em ordem ao tempo, dá o aumento de x_1 por unidade de tempo; ou seja, o deslocamento da projeção do estado do sistema no eixo x_1 , por unidade de tempo; de forma análoga, f_2 dá o deslocamento da projeção do estado do sistema no eixo x_2 , por unidade de tempo.

Assim sendo, o vetor:

$$\vec{u} = f_1(x_1, x_2) \vec{e}_1 + f_2(x_1, x_2) \vec{e}_2 \quad (7.4)$$

define o deslocamento do estado do sistema no espaço de fase, por unidade de tempo e, por isso, chama-se **velocidade de fase**. Os lados direitos equações diferenciais 7.2 denominadas **equações de evolução** do sistema, definem a velocidade de fase em qualquer ponto do espaço de fase. Por exemplo, a expressão para a velocidade de fase do sistema definido pelas equações de evolução 7.3 é: $\vec{u} = (4 - x_1^2 - x_2) \vec{e}_1 + (x_2 - x_1) \vec{e}_2$

O estado inicial $(x_1(t_0), x_2(t_0))$ no instante t_0 desloca-se no espaço de fase com a velocidade de fase $\vec{u}(t_0)$; num instante posterior t_1 , a velocidade de fase $\vec{u}(t_1)$ poderá ser outro vetor diferente que faz deslocar o estado em outra direção e com outra velocidade. Assim sendo, a evolução do estado do sistema em função do tempo é definida por uma curva contínua no espaço de fase, que parte do estado inicial $(x_1(t_0), x_2(t_0))$. Em cada ponto do espaço de fase em que as funções f_1 e f_2 estão definidas passa uma curva de evolução do sistema.

Em cada ponto do espaço de fase, a velocidade de fase \vec{u} é tangente à curva de evolução que passa por esse ponto. Duas curvas de evolução diferentes nunca se podem cruzar em nenhum ponto no domínio das funções f_1 e f_2 , porque no ponto em que se cruzassem existiriam duas velocidades de fase diferentes, que não é possível.

7.2.1. Campos de direções

É possível ter uma ideia de como é a evolução de um sistema dinâmico no tempo, sem ter de resolver as equações diferenciais 7.2. A figura 7.2 mostra a direção da velocidade de fase em vários pontos do espaço de fase, para um exemplo concreto. Esse tipo de gráfico chama-se **campo de direções**.

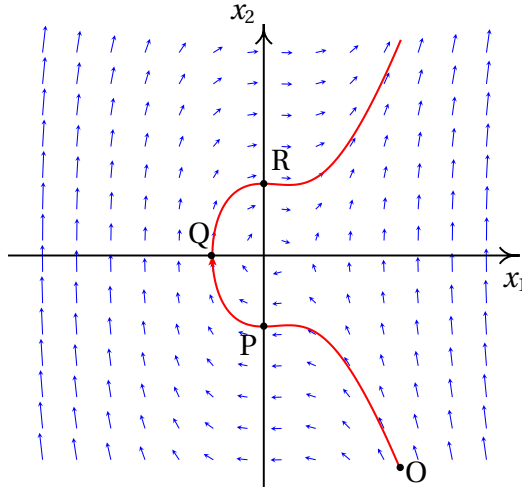


Figura 7.2.: Campo de direções de um sistema dinâmico e uma curva de evolução.

Observando o campo de direções consegue-se prever como será a curva de evolução a partir de um estado inicial num instante t_0 . Por exemplo, na figura 7.2 mostra-se uma das possíveis curvas de evolução do sistema, a partir do estado inicial P, com $x_1 = 0$ e $x_2 < 0$. Também é possível ver a evolução anterior do sistema em $t \leq t_0$ que levou a ficar com o estado inicial P em t_0 . A figura mostra que o sistema passou pelo estado O antes de alcançar o estado P.

A curva mostra que a variável x_1 , inicialmente positiva em O, diminui em função de tempo tornando-se negativa, até alcançar um valor mínimo e logo começa a aumentar ficando novamente positiva. A variável x_2 aumenta desde um valor inicial negativo e quando x_1 se aproxima de zero, diminui ligeiramente, começando a aumentar novamente enquanto x_1 permanece negativa, ficando igual a zero no instante em que x_1 tem o seu valor mínimo; quando x_1 volta a ficar positiva, x_2 diminui ligeiramente, começando novamente a aumentar.

7.2.2. Equações diferenciais de segunda ordem

A forma geral de uma equação diferencial autônoma de segunda ordem é:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) \quad (7.5)$$

que pode ser reduzida a duas equações de evolução de um sistema dinâmico com duas variáveis de estado. Basta considerar a primeira derivada \dot{x} como uma outra variável y que também depende do tempo t , assim sendo, a segunda derivada \ddot{x} é igual a \dot{y} e a equação diferencial fica $\dot{y} = f(x, y)$, que é uma equação de primeira ordem; mas como esta nova equação tem duas variáveis independentes, será necessária uma segunda equação que é a própria definição da nova variável introduzida: $y = \dot{x}$; ou seja, a equação inicial é equivalente ao sistema de duas equações:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= f(x, y) \end{aligned} \quad (7.6)$$

Estas duas equações definem um sistema dinâmico com variáveis de estado x e y , e velocidade de fase

$$\vec{u} = y \hat{i} + f(x, y) \hat{j} \quad (7.7)$$

Nos sistemas mecânicos, a segunda lei de Newton permite encontrar a equação de movimento: expressão para a aceleração. Como a aceleração é a segunda derivada da posição, a equação de movimento é uma equação diferencial de segunda ordem. Define-se como variável adicional a velocidade, que é a primeira derivada da posição e, como tal, o espaço de fase é formado pelas variáveis de posição e de velocidade. O estado do sistema em cada instante é definido pela posição e a velocidade.

Exemplo 7.1

Uma partícula com massa de 0.5 kg desloca-se ao longo de um carril, sob a ação de uma força com componente tangencial $F_t = -s^3 + 6s^2 - 3s - 10$, onde s é a posição ao longo do carril (unidades SI). (a) Escreva as equações de evolução do sistema e identifique as variáveis de estado. (b) Trace o campo de direções para valores de s no intervalo $[-4, 8]$ e valores de v no intervalo $[-30, 30]$. (c) Num instante inicial a partícula encontra-se na posição $s = 4$, com velocidade $v = 3$ m/s. Represente a curva de evolução da partícula no espaço de fase.

Resolução. (a) A aceleração tangencial \ddot{s} é igual à componente tangencial da força dividida pela massa:

$$\ddot{s} = \frac{F_t}{m} = -2s^3 + 12s^2 - 6s - 20$$

esta equação de movimento é equivalente às seguintes equações de evolução de um sistema dinâmico:

$$\dot{s} = v \quad \dot{v} = -2s^3 + 12s^2 - 6s - 20$$

As variáveis de estado são a posição na trajetória, s , e a velocidade v .

(b) e (c) A velocidade de fase é o vetor:

$$\vec{u} = v \hat{e}_s + (-2s^3 + 12s^2 - 6s - 20) \hat{e}_v$$

No Maxima, o campo de direções pode ser feito com o comando `plotdf`. Os dois primeiros argumentos que devem ser dados a esse comando são uma lista com as componentes da velocidade de fase e outra lista com os nomes das variáveis de estado. A seguir define-se o domínio de valores das variáveis de estado. Para traçar a curva de evolução que passa pelo estado inicial $s = 4$ e $v = 3$, usa-se a opção `trajectory_at`:

```
(%i1) plotdf ([v, -2*s^3+12*s^2-6*s-20], [s, v], [s, -4, 8],
             [v, -30, 30], [trajectory_at,4,3]);
```

O gráfico produzido mostra-se na figura 7.3.

Os vetores que representam a velocidade de fase não foram desenhados com o seu verdadeiro comprimento, para evitar que se cruzem, mas foram ajustados de forma a ficar com tamanho ligeiramente menor que a distância entre os pontos da quadrícula em que são desenhados os vetores.

A curva de evolução da partícula a partir de $s = 4$ mostra que a partícula avança na direção em que s aumenta, acelerando até uma velocidade máxima aproximadamente $v = 3$, começa logo a brandar até parar ($v = 0$), aproximadamente em $s = 5.8$, começa a acelerar novamente, mas agora no sentido em que s diminui (v negativa) até uma velocidade mínima aproximadamente $v = -3$, até parar novamente aproximadamente em $s = 3.8$. Nesse ponto o ciclo repete-se indefinidamente.

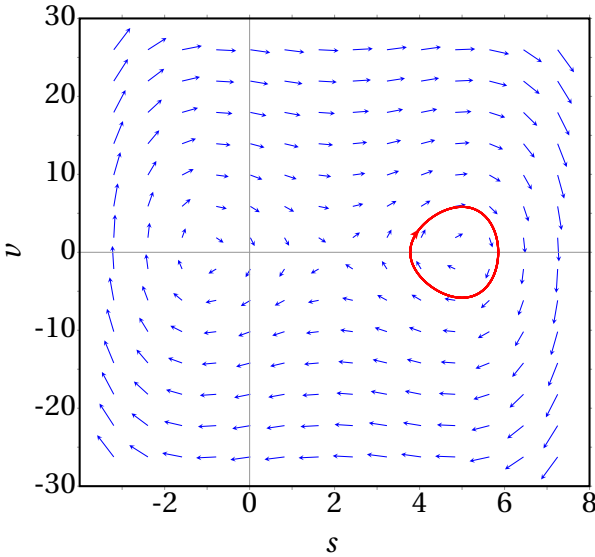


Figura 7.3.: Campo de direções do exemplo 7.1

7.2.3. Retratos de fase

O campo de direções fornece muita informação importante sobre o sistema. No exemplo apresentado na figura 7.3, as condições iniciais dadas conduzem a um movimento oscilatório à volta da posição $s = 5$. Pode ver-se na figura que, se a velocidade inicial fosse maior, ou se a partícula partisse de uma posição inicial com $s > 6$, a oscilação seria até valores de s menores que -1.5 . Também pode ver-se que existem outras oscilações (curvas de evolução fechadas) à volta de $s = -1.5$.

Um gráfico mais completo, mostrando várias curvas de evolução que ajudem a descrever os possíveis tipos de soluções do sistema, chama-se **retrato de fase** do sistema.

O campo de direções ajuda também a compreender como funcionam os métodos numéricos para resolver sistemas de equações diferenciais. Dado um ponto inicial no espaço de fase e expressões que definem a velocidade de fase em cada ponto do espaço de fase, cria-se uma sequência de pontos em que cada ponto segue o anterior na direção definida pela velocidade de fase média entre esses dois pontos — consulte o capítulo de equações diferenciais do livro “Métodos Numéricos” (Villate, 2014). A opção `trajectory_at` do comando `plotdf` que foi usada no exemplo acima faz com que

o sistema de equações diferenciais seja resolvido numericamente, com condições iniciais dadas pelas coordenadas do ponto inicial e a solução é representada no mesmo gráfico do campo de direções.

Conforme já foi referido, o primeiro argumento que deve ser dado ao programa `plotdf` é uma lista com as expressões que definem as duas componentes da velocidade de fase, ou seja, as derivadas das duas variáveis de estado. Cada uma dessas expressões pode depender unicamente das duas variáveis de estado. A seguir a essa lista escreve-se outra lista com os nomes das duas variáveis de estado, na mesma ordem que foi usada para escrever as suas derivadas na primeira lista. Há várias opções adicionais que podem ser usadas; a lista completa pode ser consultada no capítulo sobre métodos numéricos no manual do Maxima.

O programa `plotdf` abre uma nova janela com o campo de direções, como a que se mostra na figura 7.4, para o exemplo da secção anterior. Deslocando o rato sobre o espaço de fase, aparecem no canto inferior direito as coordenadas do ponto onde está o ponteiro. Clicando no primeiro botão do rato sobre algum ponto no gráfico, aparece a curva de evolução que passa por esse ponto, com uma seta que indica o sentido de evolução.

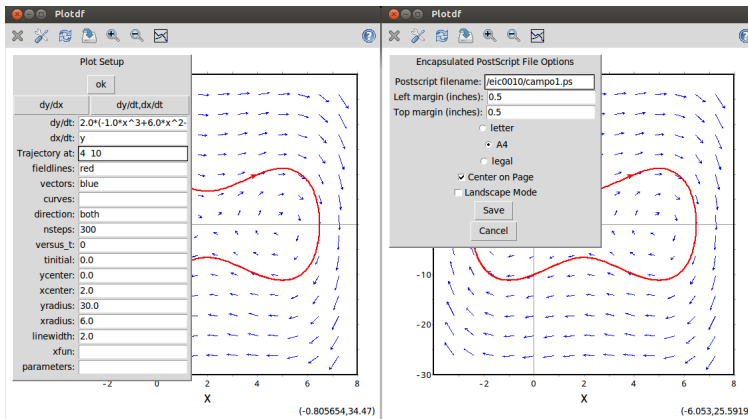


Figura 7.4.: Menus Config e Save do programa plotdf.

A barra de menu da janela gráfica inclui vários botões. Os botões com os sinais + e - permitem aumentar ou diminuir o tamanho do gráfico. O botão com um disco permite gravar uma cópia do gráfico num ficheiro, em formato Postscript. O botão do lado direito, com um pequeno gráfico, abre uma nova janela mostrando os gráficos das duas variáveis de estado em função do tempo, correspondentes à última curva de evolução que tenha sido traçada.

O botão com uma chave de fendas abre o menu “Plot SetUp” (figura 7.4) que mostra vários parâmetros que podem ser alterados: as equações que definem as componentes da velocidade de fase, as cores usadas para os vetores da velocidade de fase (**vectors**) e as curvas de evolução (**fieldlines**), o domínio, etc.

Se o campo **vectors** é deixado em branco, não são traçados os vetores do campo de direções e se o campo **fieldlines** está em branco, não são traçadas curvas de evolução. Quando se altera um parâmetro, é necessário selecionar “ok” e a seguir “Replot” (botão com setas a rodarem) para atualizar o gráfico.

O campo **direction** tem, por omissão, o valor **both**, que implica que quando se clica num ponto, aparece a curva de evolução que passa por esse ponto, para instantes anteriores e posteriores. Mudando essa variável para **forward** ou **backward**, consegue-se que a curva seja traçada unicamente para instantes posteriores ou anteriores. Introduzindo duas coordenadas no campo **Trajectory at**, separadas por espaço e carregando na tecla Enter, acrescenta-se mais uma curva que passa pelo ponto com essas coordenadas.

7.3. Pontos de equilíbrio

Em cada ponto do espaço de fase, a velocidade de fase indica a direção e sentido que segue a curva de evolução que passa por esse ponto. Nos pontos onde a velocidade de fase é nula, não existe nenhuma curva que passe por esse ponto. Nesse caso o estado da partícula permanece constante nesse ponto, que é chamado **ponto de equilíbrio**.

Exemplo 7.2

Encontre os pontos de equilíbrio do sistema dinâmico

$$\dot{x}_1 = 4 - x_1^2 - 4x_2^2 \qquad \dot{x}_2 = x_2^2 - x_1^2 + 1$$

Resolução. Para resolver o problema usando o Maxima, é conveniente associar a uma lista as duas expressões dos lados direitos das equações de evolução

```
(%i2) f: [4-x1^2-4*x2^2, x2^2-x1^2+1] $
```

a seguir, usa-se o comando `solve` para encontrar os pontos de equilíbrio que é onde as duas expressões são iguais a zero

```
(%i3) equilibrio: solve(f)$
(%i4) float (equilibrio);
(%o4) [[x2 = -0.7746, x1 = -1.265], [x2 = -0.7746, x1 = 1.265],
[x2 = 0.7746, x1 = -1.265], [x2 = 0.7746, x1 = 1.265]]
```

Chama-se **nulclina** da primeira variável à curva onde \dot{x}_1 é nula, que neste caso é a elipse $x_1^2/4 + x_2^2 = 1$, e as nulclinas da segunda variável são as duas partes da hipérbole $x_1^2 - x_2^2 = 1$.

Os pontos de equilíbrio do sistema são os quatro pontos de interseção entre a elipse e a hipérbole. Os gráficos dessas duas curvas podem ser obtidos no Maxima usando a função para gráficos de funções implícitas:

```
(%i5) load ("implicit_plot")$
(%i6) implicit_plot (f, [x1, -2.5, 2.5], [x2, -2, 2],
[legend, false], [xlabel, "x1"], [ylabel, "x2"]);
```

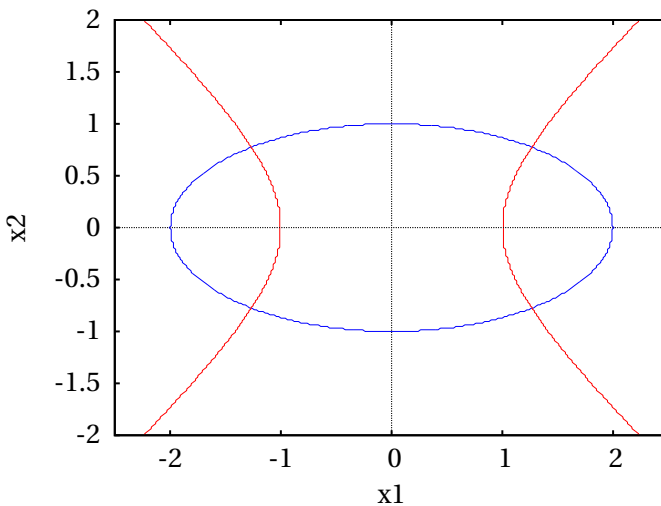


Figura 7.5.: Nulclinas e pontos de equilíbrio.

O resultado apresenta-se na figura 7.5. Dentro da elipse, como \dot{x}_1 é positiva, a velocidade de fase aponta para a direita; fora da elipse aponta para a esquerda. Na região à esquerda da hipérbole, a velocidade de fase aponta

para baixo, entre os dois ramos da hipérbole aponta para cima e à direita da hipérbole aponta para baixo.

Nos sistemas mecânicos em que as duas variáveis de fase são a posição na trajetória s e a velocidade v , se as duas componentes da velocidade de fase são nulas então a velocidade e a aceleração tangencial são nulas. Isso implica que o sistema se encontra num estado de **equilíbrio estático**, em que a componente tangencial da força resultante e a velocidade são nulas e o objeto permanece em repouso. Nesses sistemas, todos os pontos no eixo das abcissas (eixo da variável s) no espaço de fase correspondem a estados de repouso ($v = 0$), mas não necessariamente estados de equilíbrio ($a_t = 0$). Os estados de equilíbrio do sistema dinâmico são os pontos de equilíbrio estático, que estão todos no eixo das abcissas ($v = 0$) e nos quais a velocidade de fase é nula.

Nos pontos do eixo das abcissas onde a velocidade de fase não é nula, o sistema permanece instantaneamente em repouso, retomando imediatamente o seu movimento.

Um estado de **equilíbrio cinético** é um estado em que a aceleração tangencial é nula mas o objeto desloca-se com velocidade constante. No retrato de fase esses estados de equilíbrio dinâmico são retas paralelas ao eixo da posição s .

Exemplo 7.3

Um objeto com massa 0.3 kg desloca-se sob a ação de uma força com componente tangencial (unidades SI):

$$F_t = -\frac{s^4}{2} + 4s^3 - \frac{3}{2}s^2 - 32s + 25$$

onde s é a posição ao longo da trajetória. (a) Encontre os pontos de equilíbrio do sistema. (b) Represente o retrato de fase do sistema.

Resolução. (a) Pode começar-se por armazenar a expressão da força em função da posição:

$$(\%i7) Ft: -s^4/2 + 4*s^3 - 3*s^2/2 - 32*s + 25$$

Para encontrar os pontos de equilíbrio, onde a força tangencial é nula, pode

usar-se o comando `realroots`, já que só interessam as raízes reais

```
(%i8) se: float (realroots (Ft));
(%o8) [ s = -2.652, s = 0.8102, s = 3.95, s = 5.891 ]
```

Existem então 4 pontos de equilíbrio, todos com $v = 0$ e com os 4 valores de s no resultado (%o8). (b) Para construir o retrato de fase, escolhe-se um domínio que mostre os quatro pontos de equilíbrio, sem que fiquem muito próximos uns dos outros:

```
(%i9) plotdf ([v,Ft/0.3], [s,v], [s,-5,8], [v,-50,50])$
```

O resultado mostra-se na figura 7.6.

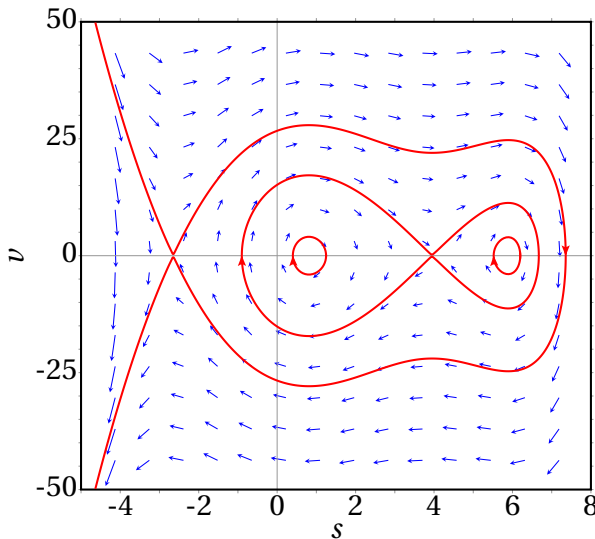


Figura 7.6.: Retrato de fase do exemplo 7.3

As curvas de evolução nas vizinhanças dos 2 pontos de equilíbrio em $s = 0.8102$ e $s = 5.891$ são fechadas, com o ponto de equilíbrio no seu interior. Nos outros dois pontos de equilíbrio, $s = -2.652$ e $s = 3.95$, há curvas de evolução que começam ou terminam no ponto (aproximam-se assintoticamente desse ponto nos limites $t \rightarrow \infty$ ou $t \rightarrow -\infty$). Nas duas próximas secções analisam-se com mais pormenor essas curvas.

7.3.1. Equilíbrio estável e instável

Os pontos de equilíbrio em $s = 0.8102$ e $s = 5.891$ no exemplo 7.3 são pontos de **equilíbrio estável**, porque se o estado inicial do sistema estiver próximo desses pontos, o sistema regressará ao esse estado inicial.

Os outros dois pontos de equilíbrio, em $s = -2.652$ e $s = 3.95$, são pontos de **equilíbrio instável**, porque se o estado inicial do sistema estiver próximo desses pontos, o sistema afastar-se-á desse estado inicial.

As componentes da velocidade de fase permitem descobrir os pontos de equilíbrio. No caso dos sistemas mecânicos em que as variáveis de estado são s e v , basta encontrar as raízes da força tangencial (ou aceleração tangencial), em função da posição s , substituindo $v = 0$. Nesses sistemas a expressão de F_t ou a_t , com $v = 0$, permite identificar os pontos de equilíbrio estável ou instável. A figura 7.7 mostra o gráfico da força tangencial do exemplo 7.3.

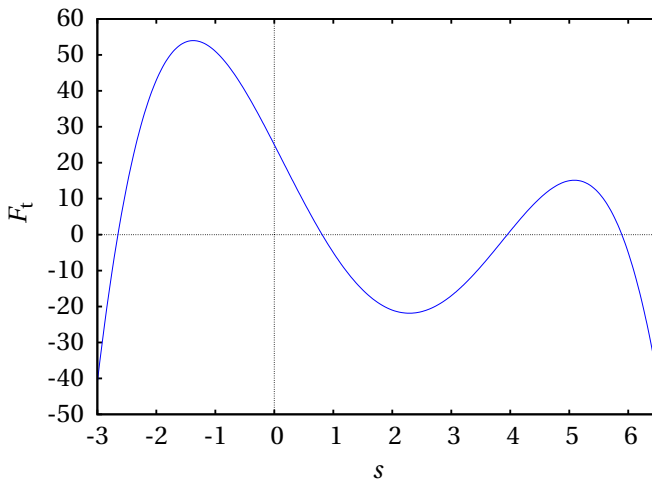


Figura 7.7.: Gráfico da força do exemplo 7.3.

Na figura 7.7, os pontos de equilíbrio s_e são os pontos em que a curva corta o eixo s . Se nesses pontos F_t passa de um valor negativo para um valor positivo, quer dizer que para $s < s_e$ a força aponta no sentido negativo de s , fazendo diminuir s ou seja, afastando o sistema do ponto de equilíbrio. Em $s > s_e$ a força é no sentido positivo de s , aumentando s e afastando também o sistema do ponto de equilíbrio. Assim sendo, nesses pontos o equilíbrio é instável.

Nos pontos de equilíbrio s_e em que F_t passa de um valor positivo para um valor negativo. A força faz aumentar s se $s < s_e$, ou diminuir se $s > s_e$. Ou seja, nesses pontos o equilíbrio é estável.

Nos capítulos 9 e 10 explica-se um método geral para analisar a estabilidade dos pontos de equilíbrio em sistemas dinâmicos mais gerais. O retrato de fase também é sempre uma boa ajuda para analisar a estabilidade dos pontos de equilíbrio.

7.3.2. Ciclos e órbitas

No exemplo 7.3 (figura 7.8) as curvas de evolução nas vizinhanças dos pontos de equilíbrio estável, em $s = 0.8102$ e $s = 5.891$, são curvas fechadas à volta do ponto de equilíbrio. Cada uma dessas curvas fechadas, designadas de **ciclos**, implicam movimento oscilatório à volta do ponto de equilíbrio.

Um ciclo é uma curva fechada no espaço de fase que corresponde a uma oscilação periódica das variáveis de estado.

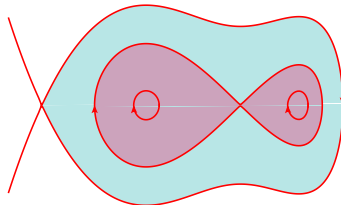


Figura 7.8.: Retrato de fase do sistema no exemplo 7.3.

A figura 7.8 mostra as partes importantes no retrato de fase do exemplo na figura 7.6. No ponto de equilíbrio instável em $s = 3.95$ há duas curvas de evolução que se aproximam assintoticamente desse ponto nos dois limites $t \rightarrow \infty$ e $t \rightarrow -\infty$; uma das curvas está ao lado esquerdo e a outra ao lado direito do ponto. Nenhuma dessas duas curvas é realmente fechada, porque o próprio ponto de equilíbrio não faz parte de nenhuma das curvas. Cada uma dessas duas curvas chama-se **órbita homoclínica** e corresponde a um **solitão**: uma oscilação não periódica, em que cada variável de estado aumenta (ou diminui) afastando-se do valor de equilíbrio, mas volta a diminuir (ou aumentar) aproximando-se novamente do valor de equilíbrio no limite $t \rightarrow \infty$.

Uma órbita homoclínica é uma curva no espaço de fase que começa e termina no mesmo ponto de equilíbrio. Representa uma oscilação não periódica (solitão) do sistema.

No retrato de fase 7.8 existe também uma terceira órbita homoclínica, que parte do ponto de equilíbrio instável em $s = -2.652$, contorna os dois pontos de equilíbrio estável em $s = 0.8102$ e $s = 5.891$ e regressa ao ponto em $s = -2.652$. Nesse exemplo, as órbitas homoclínicas demarcam a fronteira das zonas de estabilidade: na figura 7.8, as duas zonas mais escuras correspondem a oscilações do sistema à volta de algum dos dois pontos de equilíbrio estável. Na zona colorida com uma cor mais clara, o sistema oscila à volta dos dois pontos de equilíbrio estável.

Dentro de um ciclo existe sempre algum ponto de equilíbrio. Em capítulos seguintes serão estudados diferentes tipos de ciclos. Os pontos de equilíbrio onde comece e termine uma órbita homoclínica têm de ser, necessariamente, pontos de equilíbrio instável, porque há uma direção em o estado do sistema afasta-se do ponto de equilíbrio.

Observe-se que nos ciclos o sistema passa repetidamente pelos mesmos pontos no espaço de fase, enquanto que nas órbitas homoclínicas o sistema nunca chega a passar duas vezes por um mesmo ponto do espaço de fase.

O gráfico da posição s e velocidade v em função do tempo (figuras 7.9 e 7.10) pode ser traçado usando-se a opção `versus_t` do programa `plotdf`, ou com o botão do menu.

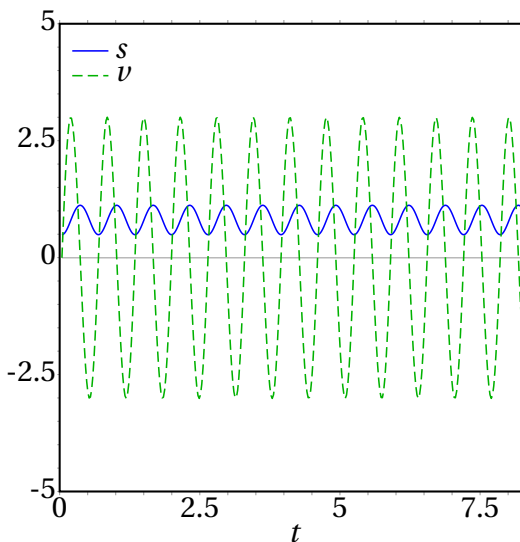


Figura 7.9.: Posição e velocidade em função do tempo no caso de um ciclo

O gráfico da evolução das variáveis no caso do ciclo, apresentado na figura 7.9, mostra a oscilação periódica das duas variáveis de estado em

função do tempo. A combinação dessas duas variáveis no espaço de fase produz a elipse à volta do ponto $(0.8102, 0)$ no retrato de fase 7.8. A figura 7.10 mostra a oscilação não periódica das variáveis de estado, em função do tempo, para a órbita homoclínica no ponto de equilíbrio $(-2.652, 0)$ do retrato de fase 7.8. Nesse ponto de equilíbrio existe unicamente uma órbita homoclínica porque as outras duas curvas que começam e terminam no ponto são curvas abertas que continuam até o infinito.

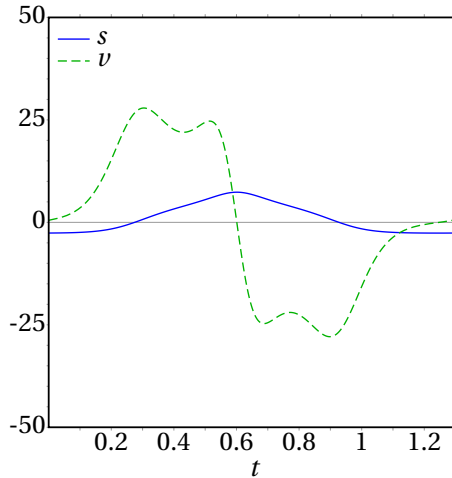


Figura 7.10.: Posição e velocidade em função do tempo no caso de uma órbita homoclínica.

Existem também **órbitas heteroclínicas** em alguns sistemas dinâmicos. O retrato de fase 7.11 mostra um exemplo. No triângulo que aparece no meio do retrato, os três vértices são pontos de equilíbrio instável; os três lados do triângulo são três curvas de evolução diferentes, que não têm nenhum ponto comum, porque os três vértices não fazem parte de nenhum desses segmentos de reta. Cada segmento parte de um ponto de equilíbrio e termina no ponto seguinte, completando uma sequência fechada de pontos e curvas, com igual número de pontos e de curvas que os ligam.

Uma órbita heteroclínica é formada por uma sequência de n curvas de evolução e n pontos de equilíbrio. A primeira curva começa no primeiro ponto e termina no segundo, a segunda curva começa no segundo ponto e termina no terceiro e assim sucessivamente até a última curva que termina no ponto inicial.

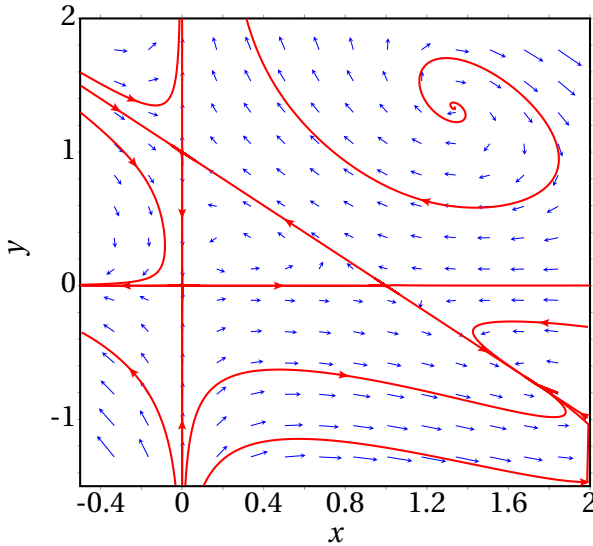


Figura 7.11.: Retrato de fase com uma órbita heteroclínica.

7.4. Sistemas conservativos

Em alguns sistemas dinâmicos é possível encontrar uma função $H(x_1, x_2)$ das variáveis de estado que define todas as curvas de evolução no espaço de fase. Cada possível curva de evolução é dada pela equação

$$H(x_1, x_2) = C \quad (7.8)$$

com diferentes valores da constante C . A função H chama-se função **hamiltoniana** e os sistemas em que é possível encontrar tal função denominam-se **conservativos** ou sistemas hamiltonianos.

Como as variáveis de estado são funções do tempo t , qualquer função $f(x_1, x_2)$ das variáveis de estado depende apenas do tempo. No caso de $H(x_1, x_2)$, a equação 7.8 implica que $\dot{H} = 0$ ao longo de qualquer curva de evolução; ou seja, em quanto o sistema evolui, o valor da função H permanece constante. Para calcular a derivada \dot{H} usa-se a regra da cadeia para funções compostas:

$$\frac{d}{dt} H(x_1, x_2) = \frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial H}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} = 0 \quad (7.9)$$

Usando as equações de evolução 7.2, obtém-se

$$f_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial H}{\partial x_2} = 0 \quad (7.10)$$

Uma forma de garantir que o resultado seja nulo, para quaisquer valores das variáveis de estado é se a função hamiltoniana cumpre as seguintes condições:

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = -f_2 \quad \frac{\partial H}{\partial x_2} = f_1 \quad (7.11)$$

e nesse caso, segue-se então que

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \quad (7.12)$$

Conclui-se assim que qualquer sistema dinâmico $\dot{x}_1 = f_1$, $\dot{x}_2 = f_2$ é conservativo se, e apenas se, a sua **divergência** é nula:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0 \quad (7.13)$$

Quando o sistema dinâmico é equivalente a uma equação diferencial de segunda ordem $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$, as equações de evolução 7.6 tornam a condição anterior mais simples:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (7.14)$$

ou seja, basta com que a função f não dependa de y (equivalente a dizer que a expressão da segunda derivada \ddot{x} depende unicamente de x e não de \dot{x}) para que o sistema seja conservativo.

No caso dos sistemas mecânicos, obtidos a partir da lei de Newton $\ddot{s} = F_t/m$, basta com que a força tangencial não dependa da velocidade v , para que o sistema seja conservativo. Nesse caso, a função hamiltoniana é definida pelas seguintes condições:

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{F_t}{m} \quad \frac{\partial H}{\partial v} = v \quad (7.15)$$

que conduzem à função,

$$H = \frac{v^2}{2} - \frac{1}{m} \int_{s_i}^s F_t ds \quad (7.16)$$

que é a energia mecânica —cinética mais potencial— por unidade de massa:

$$H(s, v) = \frac{E_c(v) + U(s)}{m} \quad (7.17)$$

Os dois sistemas considerados nos exemplos 7.1 e 7.3 são ambos conservativos. No exemplo 7.3, a energia potencial ao longo da trajetória é

$$\begin{aligned} U(s) &= - \int_{s_0}^s F_t \, ds \\ &= - \int_0^s \left(-\frac{s^4}{2} + 4s^3 - \frac{3}{2}s^2 - 32s + 25 \right) ds \\ &= \frac{s^5}{10} - s^4 + \frac{s^3}{2} + 16s^2 - 25s \end{aligned}$$

E a função hamiltoniana do sistema é

$$H(s, v) = \frac{v^2}{2} + \frac{1}{3} (s^5 - 10s^4 + 5s^3 + 160s^2 - 250s) \quad (7.18)$$

As curvas de evolução do sistema são todas as curvas de nível da função hamiltoniana $H(s, v)$ no plano sv . O comando `ploteq` do Maxima pode ser usado para traçar as curvas de nível e a sua sintaxe é semelhante à de `plotdf`, só que o primeiro argumento deve ser a função H , em vez das componentes da velocidade de fase:

```
(%i10) ploteq (v^2/2+(s^5-10*s^4+5*s^3+160*s^2-250*s)/3, [s, v],
[s, -5, 8], [v, -50, 50])$
```

A figura 7.12 mostra o resultado, após clicar em alguns pontos para que apareçam as curva de nível que passam por esses pontos.

O gráfico é semelhante ao gráfico já obtido com `plotdf` na figura 7.12. A principal diferença é que já não há setas a indicar o sentido da evolução temporal do sistema, mas como a componente horizontal da velocidade de fase é a própria velocidade, já se sabe que todas as curvas acima do eixo s deslocam-se de esquerda para direita (v positiva) e todas as curvas debaixo do eixo s deslocam-se de direita para esquerda (v negativa).

É importante compreender que a figura 7.12 mostra 9 possíveis movimentos diferentes, correspondentes a 9 curvas de evolução diferentes: 2 ciclos,

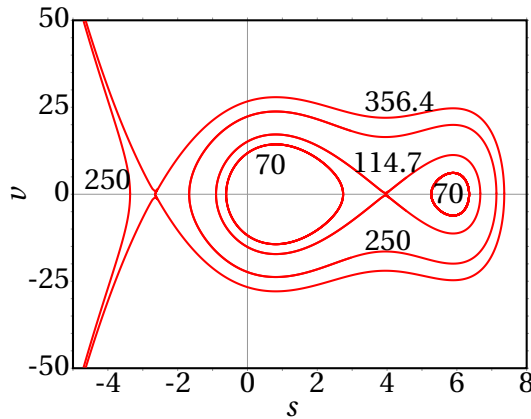


Figura 7.12.: Curvas de nível da função hamiltoniana do exemplo 7.3.

com $H = 70$, cada um à volta de um dos dois pontos de equilíbrio estável. Um ciclo com $H = 250$, que contorna os dois pontos de equilíbrio estável e o ponto de equilíbrio instável entre eles. Duas órbitas homoclínicas, ambas com $H = 114.7$, que começam e terminam no ponto de equilíbrio instável e cada uma contorna um dos pontos de equilíbrio estável; 114.7 é o valor de H no ponto de equilíbrio instável, aproximado a uma casa decimal. No segundo ponto de equilíbrio instável H tem o valor 356.4 e há três curvas de evolução com esse valor de H : uma órbita homoclínica que contorna os outros 3 pontos de equilíbrio, uma curva que começa no ponto de equilíbrio instável e outra que termina nesse ponto. No lado esquerdo dessas duas últimas curvas há ramos de hipérbolas que se aproximam assintoticamente dessas duas curvas, com valores de H menores que 356.4 . A figura mostra uma delas, com $H = 250$.

Como foi referido no capítulo 6 (trabalho e energia), nos sistemas com forças conservativas os possíveis movimentos do sistema podem ser analisados no gráfico da energia potencial. No caso do exemplo 7.3, a figura 7.13 mostra o gráfico da energia potencial por unidade de massa, $V = U/m$. Os dois pontos de equilíbrio estável estão assinalados com círculos sólidos e os dois pontos de equilíbrio instável com circunferências.

Uma propriedade importante é:

Num sistema mecânico conservativo, os pontos de equilíbrio estável são todos os mínimos locais da energia potencial e os pontos de equilíbrio instável são todos os máximos locais da energia potencial.

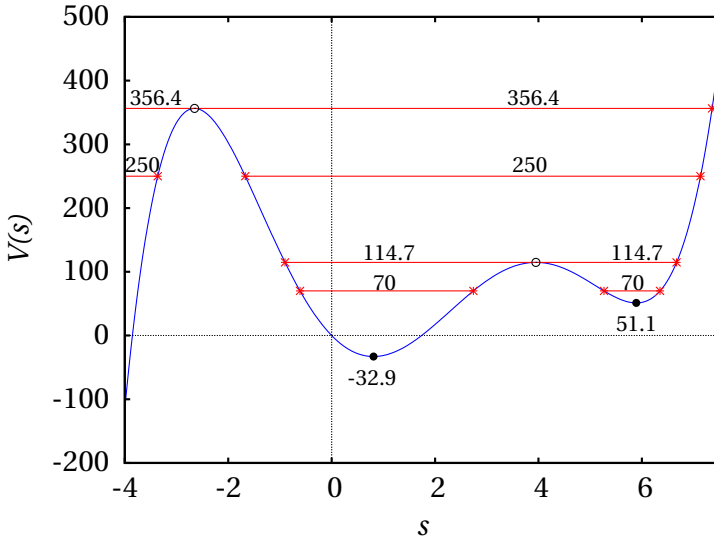


Figura 7.13.: Energia potencial por unidade de massa no exemplo 7.3 e 9 possíveis movimentos para alguns valores de H .

No gráfico 7.13 estão também representadas as mesmas 9 curvas de evolução que foram traçadas no retrato de fase 7.12. Cada curva de evolução corresponde a um segmento de reta horizontal, com um valor de H constante, que só inclui os pontos onde H é maior que V . Lembre-se que, neste caso, $H = v^2/2 + V$; ou seja, em cada ponto num dos segmentos horizontais, v^2 é igual ao dobro da distância vertical do ponto até a curva $V(s)$; há dois valores da velocidade, com o mesmo valor absoluto $\sqrt{2(H - V)}$ e com sinais opostos, que correspondem à passagem da curva de evolução acima e debaixo do eixo s no espaço de fase (figura 7.12). Nos pontos assinalados com asteriscos, a velocidade é nula, tal como nos pontos de equilíbrio, mas a aceleração tangencial (declive de V com sinal trocado) não; como tal, nesses pontos o sistema inverte o sentido do seu movimento.

As curvas com $H > 356.4$ são movimentos em que o sistema pode partir de $s < -2.652$ (menor que a posição do ponto de equilíbrio instável), com $v > 0$, passando por todos os 4 pontos de equilíbrio e parando logo numa posição $s > 5.891$, onde inverte o sentido, repetindo o mesmo movimento mas com valores negativos de v .

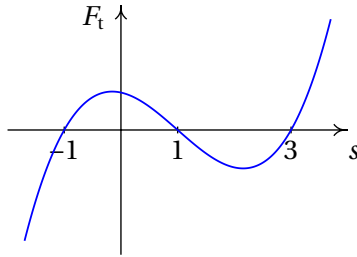
Os dois gráficos 7.13 e 7.12 mostram a mesma informação de duas formas diferentes. A partir de um desses dois gráficos consegue-se visualizar como será o outro. De facto, para construir a figura 7.12, calculou-se com precisão

o valor de s para um dos pontos assinalados com asteriscos nos segmentos de reta do gráfico 7.13 e introduziu-se esse valor, seguido de 0 (velocidade), no campo “Trajectory at” do menu de configuração do programa **ploteq**.

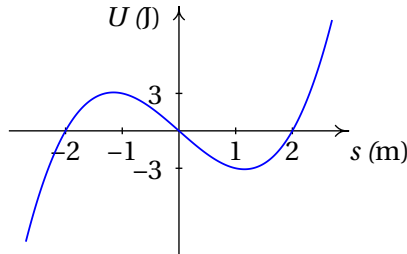
Pode imaginar-se a curva de energia potencial por unidade de massa como uma calha vertical; colocando uma esfera onde a altura é um máximo local, pode permanecer em repouso, mas um pequeno impulso faz com que comece a descer, afastando-se desse ponto máximo (equilíbrio instável). Se a esfera for libertada do repouso perto de um ponto onde a altura é um mínimo local (equilíbrio estável), desce acelerando até chegar ao mínimo, subindo no lado oposto até parar; se a esfera não perde nenhuma energia mecânica no seu percurso, a altura do ponto onde pára é igual à altura do ponto onde foi libertada. Assim sendo, a esfera volta a descer e regressa ao ponto inicial repetindo o ciclo indefinidamente.

Perguntas

1. A força tangencial resultante sobre uma partícula é $F_t = (2 - s)(3 - s)$. Em $t = 0$ a partícula encontra-se em repouso no ponto $s = 2.5$. Em que ponto se encontrará após um tempo muito elevado?
 - A. Muito afastada, em $s \rightarrow \infty$
 - B. Oscilando à volta de $s = 2$
 - C. Em $s = 2$
 - D. Em $s = 3$
 - E. Oscilando à volta de $s = 3$
2. Qual das seguintes é uma condição suficiente e necessária para um sistema ser autónomo?
 - A. Não ter nenhum ponto de equilíbrio instável.
 - B. Não depender de outros sistemas.
 - C. Evoluir de forma espontânea, sem precisar de agentes externos.
 - D. O seu estado não depender do tempo.
 - E. A sua evolução a partir de um estado inicial ser igual em diferentes instantes.
3. A figura mostra o gráfico da componente tangencial da força resultante $F_t(s)$, que atua sobre um corpo. Qual das seguintes afirmações é verdadeira, em relação aos pontos de equilíbrio desse corpo?



- A. $s = -1$ é estável e $s = 1$ instável.
 - B. $s = 1$ é estável e $s = 3$ instável.
 - C. $s = -1$ é estável e $s = 3$ instável.
 - D. $s = -1$ e $s = 3$ são ambos estáveis.
 - E. $s = -1$ e $s = 1$ são ambos instáveis.
4. A figura mostra o gráfico da energia potencial $U(s)$ ao longo da trajetória, de um sistema mecânico conservativo. No instante inicial a energia mecânica é 5 J, a posição $s = 1$ m e a velocidade é no sentido positivo de s . Como será o movimento do sistema?



- A. Oscila à volta da posição $s = 1$
 - B. Oscila à volta da posição $s = 2$
 - C. Desloca-se até $s = 2$ e regressa, ficando em repouso em $s = -1$
 - D. Permanece em repouso em $s = 1$
 - E. Desloca-se até $s > 2$ e logo afasta-se em sentido negativo até $-\infty$.
5. Qual é a velocidade de fase do sistema conservativo com energia potencial ao longo da trajetória $U(s) = 3e^s$ e massa $m = 3$?
- A. $v \hat{e}_s - e^s \hat{e}_v$
 - B. $v \hat{e}_s - e^{-s} \hat{e}_v$
 - C. $v \hat{e}_s - s \hat{e}_v$
 - D. $v \hat{e}_s + e^s \hat{e}_v$
 - E. $v \hat{e}_s + e^{-s} \hat{e}_v$

Problemas

1. Uma bola com 0.150 kg é lançada verticalmente para cima, desde $y = 0$ (o eixo dos y aponta para cima, na vertical). Desprezando a resistência do ar, a energia permanece constante.
 - (a) Represente o retrato de fase, para $y > 0$, mostrando 4 curvas de evolução diferentes (use o valor 9.8 m/s^2 para g). Para cada curva, explique o significado dos pontos em que a curva intersecta os eixos.
 - (b) Explique como seria, no retrato de fase da alínea anterior, a curva de evolução de uma bola largada em queda livre, que bate no chão sendo projetada novamente para cima.
2. Nos problemas 2 a 11 do capítulo 1, diga quais correspondem a sistemas autónomos ou não autónomos e conservativos ou não conservativos. Represente o retrato de fase do sistema do problema 6, mostrando a curva de evolução com as condições iniciais dadas.
3. Considere os 3 casos no problema 8 do capítulo 1: $a_t = -4s(1 + ks^2)$ (unidades SI) (a) $k = 0$, (b) $k = 0.015$, (c) $k = -0.015$. Em cada caso encontre os pontos de equilíbrio, determine que tipo de ponto de equilíbrio é cada um, trace o retrato de fase e diga se existem ciclos, órbitas homoclínicas ou órbitas heteroclínicas.
4. Uma partícula com massa de 1 kg desloca-se ao longo do eixo dos x . Em unidades SI, a força resultante sobre a partícula é dada pela expressão $F_x = x^3 - 4x$.
 - (a) Determine os pontos de equilíbrio do sistema.
 - (b) Encontre as expressões para a energia potencial e a energia mecânica, em função da posição x e da velocidade v .
 - (c) Escreva as equações de evolução e diga que tipo de sistema dinâmico representam.
 - (d) Caracterize cada um dos pontos de equilíbrio.
 - (e) Determine se o sistema tem ciclos, órbitas homoclínicas ou órbitas heteroclínicas e, nos casos afirmativos represente uma dessas curvas no retrato de fase.
5. Uma partícula com massa de 1 kg desloca-se ao longo do eixo dos x , sob a acção de uma única força conservativa, com energia potencial dada pela expressão (unidades SI)

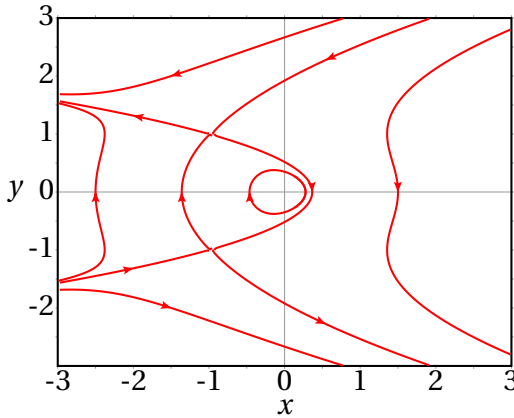
$$U = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

- (a) Determine a expressão da força em função de x .
- (b) Encontre os pontos de equilíbrio da partícula, no espaço de fase (x, v) , onde v é a velocidade.
- (c) Caracterize cada um dos pontos de equilíbrio.
- (d) Determine se o sistema tem ciclos, órbitas homoclínicas ou órbitas heteroclínicas e, nos casos afirmativos represente uma dessas curvas no retrato de fase.

6. A figura mostra o retrato de fase do sistema dinâmico com equações de evolução:

$$\dot{x} = y - y^3 \quad \dot{y} = -x - y^2$$

- (a) Indique se o sistema tem algum ciclo, órbita homoclínica ou órbita heteroclínica.
- (b) Explique porque a seguinte afirmação é errada: “O retrato de fase inclui duas curvas de evolução parabólicas que se cruzam em dois pontos”.



7. A força tangencial resultante sobre um corpo com massa igual a 1 kg é $F_t = s + s^2$.
- (a) Encontre os pontos de equilíbrio e diga se são estáveis ou instáveis.
 - (b) Determine a energia potencial ao longo da trajetória, em função de s , arbitrando $U = 0$ em $s = 0$ e calcule a energia potencial em cada ponto de equilíbrio.
 - (c) Represente o retrato de fase do sistema, mostrando as 4 curvas de evolução correspondentes às seguintes energias: 0, uma energia menor que as energias nos pontos de equilíbrio, uma energia compreendida entre as energias dos dois pontos de equilíbrio e uma energia maior que a energia nos pontos de equilíbrio.

(d) Encontre a posição s onde o corpo pode estar em repouso, sem estar em equilíbrio, com energia total igual a zero; explique como seria o movimento do corpo nesse caso.

8. Uma partícula com massa m desloca-se sob a ação de uma força resultante com componente tangencial:

$$F_t = -k s + \frac{a}{s^3}$$

onde k e a são duas constantes positivas.

(a) Encontre os pontos de equilíbrio e mostre que todos são estáveis.

(b) Explique os possíveis movimentos da partícula.

(c) Trace o retrato de fase num sistema de unidades em que m , k e a são todas iguais a 1.

9. A equação de movimento de um pêndulo simples é (problema 6 do capítulo 6)

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

As variáveis de estado são o ângulo com a vertical, θ e a derivada desse ângulo, ω .

(a) Escreva as equações de evolução do sistema.

(b) Determine a função hamiltoniana $H(\theta, \omega)$ a partir das equações de Hamilton:

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial \omega} \quad \dot{\omega} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}$$

(c) Analisando o gráfico da energia potencial (função hamiltoniana com $\omega = 0$), demonstre que o sistema tem uma órbita heteroclínica e ciclos mas nenhuma órbita homoclínica.

10. Uma partícula com massa m desloca-se no eixo dos x com energia potencial:

$$U(x) = U_0 x^2 e^{-ax^2}$$

onde U_0 e a são duas constantes positivas.

(a) Determine a força que atua na partícula.

(b) Encontre os pontos de equilíbrio e diga se são estáveis ou instáveis.

(c) Represente o gráfico da energia potencial para $U_0 = 1$ e $a = 1$.

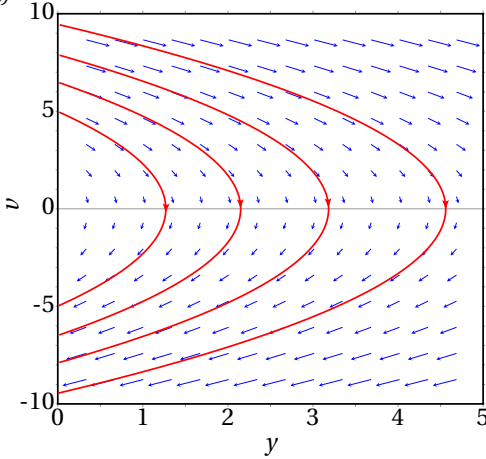
(d) Represente o retrato de fase, no caso $m = 1$, mostrando a órbita heteroclínica e um dos ciclos.

Respostas

Perguntas: 1. B. 2. E. 3. B. 4. E. 5. A.

Problemas

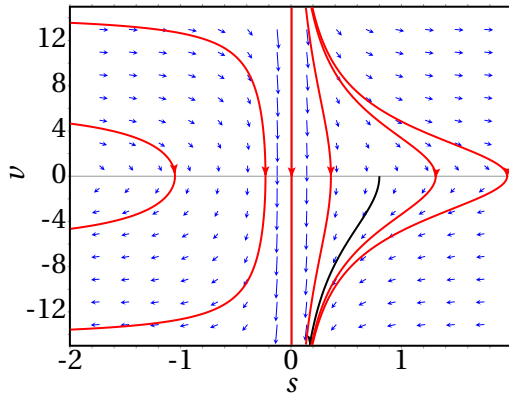
1. (a)



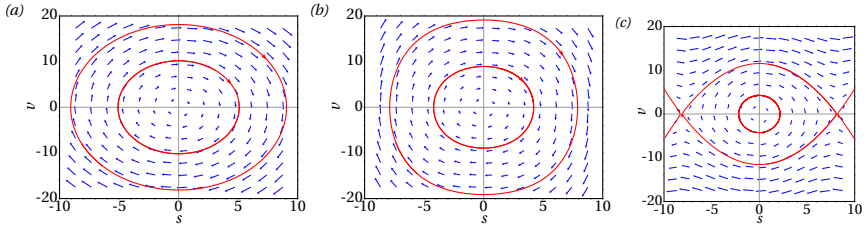
Os dois pontos simétricos onde cada parábola interseca o eixo da velocidade (ordenadas), representam o estado quando a partícula é lançada e quando cai novamente ao chão; o vértice de cada parábola no eixo das abcissas, é o estado no ponto onde a bola atinge a altura máxima.

(b) A bola segue uma das curvas parabólicas no espaço de fase, e quando chega ao ponto no lado negativo do eixo da velocidade (ordenadas no espaço de fase), passa instantaneamente para o ponto que está à mesma distância da origem no lado positivo do eixo da velocidade.

2. Sistemas autónomos e conservativos nos problemas 3, 6, 7, 8, e 9. Sistema autónomo mas não conservativo no problema 10. Sistemas não autónomos e, portanto, não conservativos, nos problemas 2, 4, 5 e 11. O retrato de fase do problema 6 é o gráfico à direita.



3. Quando $k = 0$ ou $k = 0.015$, existe unicamente um ponto de equilíbrio estável, em $s = 0, v = 0$, todas as curvas de evolução são ciclos e não existem órbitas. Quando $k = -0.015$ existem dois pontos de equilíbrio instável $s = -8.16$ e $s = +8.16$ ($v = 0$) e um ponto de equilíbrio estável $s = 0, v = 0$; existe uma órbita heteroclínica e todas as curvas de evolução no seu interior são ciclos; não existe nenhuma órbita homoclínica.

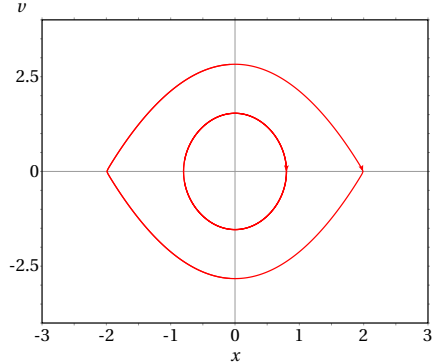


4. (a) $(x, v) = (0, 0), (2, 0)$ e $(-2, 0)$.

$$(b) U = -\frac{x^4}{4} + 2x^2$$

$$E_m = \frac{v^2}{2} - \frac{x^4}{4} + 2x^2$$

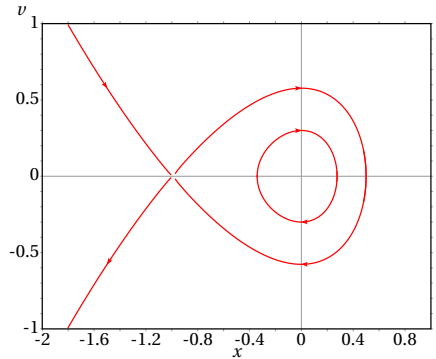
(c) $\dot{x} = v, \dot{v} = x^3 - 4x$. É um sistema dinâmico autônomo e conservativo. (d) $(-2, 0)$ é instável, $(0,0)$ é estável e $(2, 0)$ é instável.



(e) Existem infinitos ciclos, uma órbita heteroclínica e nenhuma órbita homoclínica. O gráfico acima mostra um ciclo e a órbita heteroclínica.

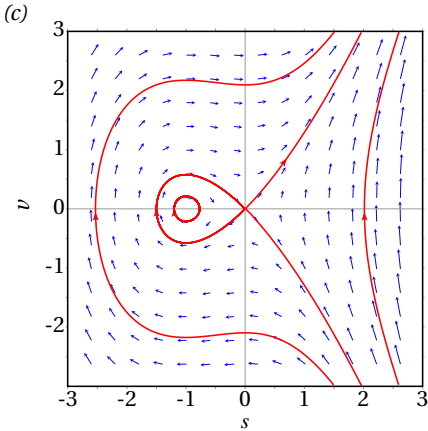
5. (a) $F = -x - x^2$ (b) $(0, 0)$ e $(-1, 0)$

(c) $(0, 0)$ é estável e $(-1, 0)$ é instável. (d) Existem infinitos ciclos, uma única órbita homoclínica e nenhuma órbita heteroclínica. O gráfico seguinte mostra um ciclo, a órbita homoclínica e as outras duas curvas de evolução que se aproximam do ponto de equilíbrio instável.



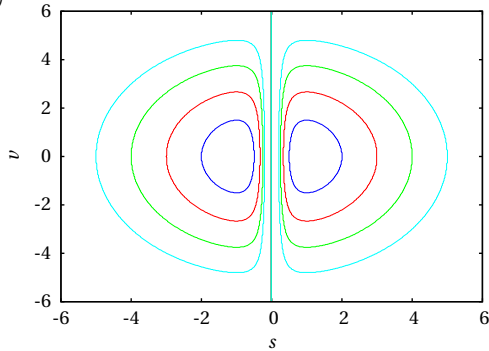
6. (a) Há uma órbita heteroclínica entre os pontos de equilíbrio instável $(-1, 1)$ e $(-1, -1)$ e nenhuma órbita homoclínica. Todas as curvas de evolução na região delimitada pela órbita heteroclínica são ciclos. (b) As duas parábolas são realmente 6 curvas de evolução diferentes, que se aproximam assintoticamente ou se afastam dos dois pontos de equilíbrio instável sem tocá-los. As curvas de evolução nunca podem cruzar-se.

7. (a) Em $s = -1$, equilíbrio estável e em $s = 0$, equilíbrio instável. (b) $U = -s^2/2 - s^3/3$. No ponto de equilíbrio estável $E = -1/6 J$ e no ponto de equilíbrio instável $E = 0$.



(d) $s = -3/2$; o corpo acelera no sentido positivo de s , começa a abrandar a sua velocidade em $s = -1$ e acaba por parar em $s = 0$, ficando em repouso.

8. (a) Há dois pontos de equilíbrio: $\pm\sqrt[4]{a/k}$. Nos dois pontos o potencial é um mínimo local e, portanto, o equilíbrio é estável. (b) O movimento é sempre oscilatório, em s positiva ou negativa, de acordo com o estado inicial.



9. (a) $\dot{\theta} = \omega$, $\dot{\omega} = -(g/l) \sin\theta$ (b) H é E_m dividida pelo momento de inércia ml^2 : $H(\theta, \omega) = \frac{\omega^2}{2} - \frac{g}{l} \cos\theta$ (c) Há pontos de equilíbrio estável em $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ e pontos de equilíbrio instável em $\pm\pi, \pm 3\pi, \dots$. Qualquer valor de H entre $-g/l$ e g/l corresponde a um ciclo; em $H = g/l$ existe uma órbita heteroclínica que passa por todos os pontos de equilíbrio instável $-\pi$ e $\pi, 3\pi, \dots$. Não existem órbitas homoclínicas porque qualquer segmento de reta com $H = g/l$ começa e termina em pontos de equilíbrio instáveis e não intersecta a curva U .

10. (a) $2U_0 x(ax^2 - 1)e^{-ax^2}$ (b) Estável em $x = 0$ e instável em $\pm 1/\sqrt{a}$.

