

## 6. Trabalho e energia



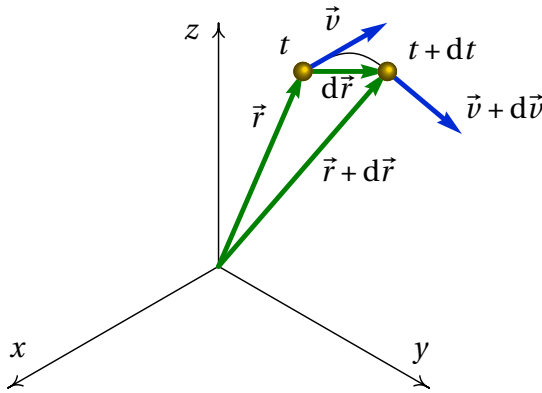
Num salto com vara, a energia cinética da corrida inicial é convertida em energia potencial elástica da vara dobrada. Enquanto a vara recupera a forma reta, essa energia potencial elástica é transformada em energia potencial gravítica. No instante em que a vara recupera a forma reta, o saltador aproveita para empurrar para baixo, fazendo com que a reação do chão aumente ainda mais a sua energia potencial gravítica; finalmente, o saltador larga a vara e cai livremente transformando-se a energia potencial gravítica adquirida no salto em energia cinética.

## 6.1. Trabalho e energia cinética

A segunda lei de Newton (equação 4.4)

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad (6.1)$$

onde  $\vec{F}$  é a resultante de todas as forças externas, conduz a uma relação útil chamada teorema do trabalho e da energia cinética. Para demonstrar esse teorema, considere-se um deslocamento vetorial infinitesimal  $d\vec{r}$  durante um intervalo infinitesimal de tempo  $dt$  (figura 6.1).



**Figura 6.1.:** Vetores posição e velocidade num instante  $t$  e num instante posterior  $t + dt$ .

No limite infinitesimal em que  $dt$  tende para zero, o deslocamento vetorial é na direção tangencial e com módulo igual ao deslocamento ao longo da trajetória:

$$d\vec{r} = \vec{v} dt = (v dt) \vec{e}_t = ds \vec{e}_t \quad (6.2)$$

Usando esta expressão e multiplicando com produto escalar os dois lados da equação 6.1 pelo deslocamento infinitesimal, obtém-se

$$\vec{F} \cdot (ds \vec{e}_t) = m \vec{a} \cdot (ds \vec{e}_t) \implies F_t ds = m a_t ds \quad (6.3)$$

A equação cinemática  $a_t = v dv/ds$  implica que  $a_t ds$  é igual a  $v dv$  e, como tal,

$$F_t ds = m v dv \quad (6.4)$$

Integrando os dois lados da equação desde uma posição  $s_1$ , onde a velocidade é  $v_1$ , até outra posição  $s_2$  onde a velocidade é  $v_2$ , obtém-se o **teorema do trabalho e a energia cinética**:

$$\int_{s_1}^{s_2} F_t ds = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad (6.5)$$

A função da velocidade:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \quad (6.6)$$

chama-se **energia cinética** e o integral da componente tangencial da força ao longo da trajetória chama-se **trabalho** da força:

$$W_{12} = \int_{s_1}^{s_2} F_t ds \quad (6.7)$$

Ou seja, o teorema estabelece que

*O trabalho realizado pela força resultante, ao longo da trajetória, é igual ao aumento da energia cinética da partícula.*

Observe-se que em geral o trabalho de uma força pode ser calculado integrando  $\vec{F} \cdot d\vec{r}$  ao longo de qualquer curva, mas se essa curva não é a trajetória da partícula, o resultado pode não ser igual ao aumento de energia cinética. Em geral, um integral de linha entre dois pontos produz diferentes valores para diferentes curvas que unem esses pontos.

Unicamente a componente tangencial da força realiza trabalho ao longo da trajetória e pode alterar a energia cinética da partícula. Uma força perpendicular à trajetória não realiza trabalho e não altera a energia cinética da partícula.

O trabalho e a energia cinética têm unidades de energia, ou seja, joules no Sistema Internacional de unidades ( $1 \text{ J} = 1 \text{ N}\cdot\text{m}$ ).

Em coordenadas cartesianas, o deslocamento infinitesimal  $d\vec{r}$  é,

$$d\vec{r} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k} \quad (6.8)$$

**Exemplo 6.1**

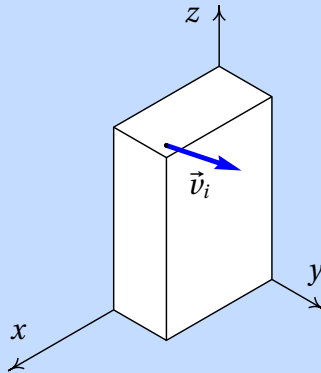
Um canhão dispara uma bala com 5 cm de raio, desde o terraço de um edifício, na posição inicial (em metros):

$$\vec{r}_i = 9 \hat{i} + 4 \hat{j} + 15 \hat{k}$$

com velocidade inicial (metros sobre segundo):

$$\vec{v}_i = 13 \hat{i} + 22.5 \hat{j} + 15 \hat{k}$$

determine a altura máxima atingida pela bala (valor máximo da coordenada  $z$ ) e a posição em que a bala bate no chão ( $z = 0$ ).



**Resolução.** Este é o mesmo exemplo 2.3 que já foi resolvido no capítulo 2, mas será agora resolvido através do trabalho e do impulso. Uma bala metálica tem massa volúmica aproximadamente 8 vezes maior que a da água. Nessas condições, a velocidade terminal da bala é da ordem de 132 m/s. O problema será resolvido ignorando a resistência do ar e a solução obtida será usada para comparar a velocidade máxima com a velocidade terminal. Um valor da velocidade máxima próximo ou por cima da velocidade limite indicará que a solução obtida tem um erro elevado.

No sistema de eixos da figura, o peso escreve-se  $-mg \hat{k}$  e o impulso que produz desde o instante do lançamento da bala,  $t = 0$ , até um instante  $t$  posterior é,

$$\vec{I} = - \int_0^t mg \hat{k} dt = -mgt \hat{k}$$

igualando o impulso à variação da quantidade de movimento, e dividindo pela massa, obtém-se,

$$\vec{v} = \vec{v}_i - g t \hat{k} \implies \vec{v} = 13 \hat{i} + 22.5 \hat{j} + (15 - 9.8 t) \hat{k} \quad (6.9)$$

Assim sendo, as componentes  $x$  e  $y$  da velocidade permanecem constantes. O valor mínimo do módulo da velocidade ocorrerá no instante em que  $(15 - 9.8 t)$  for igual a zero; o valor mínimo da velocidade,  $v_{\min} = \sqrt{13^2 + 22.5^2} = 25.99$ , corresponde ao ponto de altura máxima.

O trabalho realizado pelo peso é:

$$\begin{aligned} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= -m g \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \hat{k} \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}) \\ &= -m g \int_{z_i}^z dz = m g (z_i - z) \end{aligned}$$

igualando à variação da energia cinética e dividindo pela massa,

$$2 g (z_i - z) = v^2 - v_i^2 \quad (6.10)$$

Substituindo  $v$  pelo valor mínimo da velocidade, calcula-se a altura máxima  $z_m$

$$\begin{aligned} 2 \times 9.8 \times (15 - z_m) &= 25.99^2 - 30^2 \\ z_m &= 26.47 \text{ m} \end{aligned}$$

Para calcular a posição em que a bala bate no chão, calcula-se o valor da velocidade, quando a bala bate no chão, substituindo  $z = 0$  na equação 6.10:

$$2 \times 9.8 \times 15 = v^2 - 30^2 \implies v = 34.55 \text{ m/s}$$

e, de acordo com a equação 6.9, o quadrado do módulo da velocidade é:

$$34.55^2 = 13^2 + 22.5^2 + (15 - 9.8 t)^2 \implies t = 3.855 \text{ s}$$

(tendo em conta que o tempo  $t$  é positivo). Durante esse tempo, o deslocamento horizontal é igual a:  $\vec{d} = 3.855 (13 \hat{i} + 22.5 \hat{j}) = (50.11 \hat{i} + 86.73 \hat{j}) \text{ m}$ , já que a componente horizontal da velocidade é constante. Somando os

valores das componentes  $x$  e  $y$  na posição inicial, obtém-se a posição em que a bala bate no chão:

$$\vec{r} = (59.11 \hat{i} + 90.73 \hat{j}) \text{ m}$$

Observe-se que os resultados são ligeiramente diferentes dos que foram obtidos no exemplo 2.3. Em ambos casos os resultados intermédios foram apresentados arredondando para 4 algarismos significativos, mas todos os cálculos foram feitos usando formato de vírgula flutuante com precisão dupla (16 algarismos significativos). A diferença está em que, apesar de o tempo que a bala demora em bater no chão aparecer igual nos dois casos (3.855 s) os valores internos em precisão dupla são diferentes, por terem sido usados métodos diferentes e o erro numérico é diferente nos dois casos.

O valor máximo da velocidade, atingido quando a bala bate no chão, é 34.55 m/s. Como esse valor é muito menor que a velocidade terminal (132 m/s), a solução obtida ignorando a resistência do ar não estará muito longe da solução verdadeira.

O teorema do trabalho e da energia cinética só contém uma parte da informação contida na segunda lei de Newton, já que a equação vetorial 6.1 são realmente 3 equações (uma para cada componente) agrupadas convenientemente em vetores. Contudo, é possível extrair as mesmas três equações a partir da energia cinética. Tendo em conta que:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \quad (6.11)$$

então as três componentes cartesianas da equação 6.1 obtêm-se assim:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial v_x} \right) = F_x \quad \Rightarrow \quad m a_x = F_x \quad (6.12)$$

e de forma análoga para as componentes  $y$  e  $z$ . Esta equação é generalizada no capítulo 8 para qualquer outro sistema de coordenadas diferentes das cartesianas.

## 6.2. Forças conservativas

Uma força  $\vec{F}(\vec{r})$  que depende unicamente da posição  $\vec{r}$  chama-se **conservativa**, se o integral de linha entre dois pontos nas posições  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$ ,

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (6.13)$$

dá o mesmo resultado, para qualquer percurso possível desde  $\vec{r}_1$  até  $\vec{r}_2$ .

Assim sendo, é possível escolher um ponto arbitrário na posição  $\vec{r}_0$  e definir uma função que  $U$  em qualquer ponto:

$$U = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (6.14)$$

observe-se que com essa definição,  $U = 0$  na posição  $\vec{r}_0$ .

A função  $U$  não pode ser definida quando o resultado do integral de linha em 6.14 não está bem definido, ou seja, quando o resultado é diferente usando diferentes percursos. A escolha do sinal negativo na definição é explicada mais à frente. A função  $U$  tem unidades de energia e denomina-se **energia potencial** associada à força conservativa  $\vec{F}$ . A vantagem de definir energias potenciais é que  $U(\vec{r})$  é uma função escalar, mais simples do que a função vetorial  $\vec{F}(\vec{r})$ , que permite caracterizar completamente a força; ou seja, dada uma energia potencial qualquer é possível encontrar a expressão da força associada.

Usando o teorema fundamental do cálculo vetorial, o integral de linha da força conservativa  $\vec{F}$  é igual a:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) \quad (6.15)$$

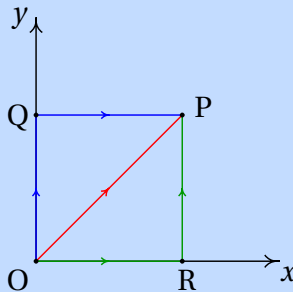
isto é:

*O trabalho realizado entre dois pontos por uma força conservativa é igual à diminuição da energia potencial associada a essa força.*

Observe-se que o trabalho é igual à diminuição da energia potencial, e não o seu aumento, devido à escolha do sinal negativo na definição da energia potencial. observe-se também que a definição 6.14 implica que a energia potencial tem valor nulo na posição de referencia  $\vec{r}_0$ ; o efeito de usar diferentes escolhas do ponto de referencia  $\vec{r}_0$  é acrescentar ou subtrair uma constante a  $U$  em todos os pontos, mas as diferenças de energia potencial,  $U_1 - U_2$ , são independentes do ponto usado como referencia. O valor numérico da energia potencial num ponto não tem nenhum significado físico; o que tem significado é a diferença dos valores da energia potencial em dois pontos.

### Exemplo 6.2

Calcule o integral de linha da força  $\vec{F} = (3x + y)\hat{i}$ , desde a origem O até o ponto P no plano  $xOy$ , com coordenadas  $x = y = 1$ , usando os 3 percursos indicados na figura:  $C_1$  é o segmento de reta  $\overline{OR}$  (R com coordenadas  $x = 1, y = 0$ ), seguido pelo segmento de reta  $\overline{RP}$ ,  $C_2$  é o segmento de reta  $\overline{OQ}$  (Q com coordenadas  $x = 0, y = 1$ ), seguido pelo segmento de reta  $\overline{QP}$  e  $C_3$  é o segmento de reta  $\overline{OP}$ .



**Resolução.** A equação vetorial do segmento de reta  $\overline{OR}$  é:  $\vec{r} = x\hat{i}$ , com  $0 \leq x \leq 1$ . Como tal, o deslocamento infinitesimal ao longo desse segmento é

$$d\vec{r} = dx\hat{i}$$

e o integral de linha nesse segmento é:

$$\int_0^R \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 3x\hat{i} \cdot (dx\hat{i}) = \int_0^1 3x dx = 1.5$$



A equação do segmento  $\overline{RP}$  é  $\vec{r} = \hat{i} + y\hat{j}$ ,  $0 \leq y \leq 1$ , o deslocamento infinitesimal é  $d\vec{r} = dy\hat{j}$ , e o integral de linha nesse segmento é igual a:

$$\int_R^P \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (3+y)\hat{i} \cdot (dy\hat{j}) = 0$$

O integral de linha no percurso  $C_1$  é então igual a 1.5.

A equação do segmento  $\overline{OQ}$  é  $\vec{r} = y\hat{j}$ ,  $0 \leq y \leq 1$ , e o integral de linha nesse segmento é,

$$\int_O^Q \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 y\hat{i} \cdot (dy\hat{j}) = 0$$

A equação do segmento  $\overline{QP}$  é  $x\hat{i} + \hat{j}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , e o integral de linha nesse segmento é,

$$\int_Q^P \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (3x+1)\hat{i} \cdot (dx\hat{i}) = 2.5$$

O integral de linha no percurso  $C_2$  é então igual a 2.5.

No segmento  $\overline{OP}$ ,  $y$  é igual a  $x$  e, como tal, a equação do segmento é  $\vec{r} = x(\hat{i} + \hat{j})$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . O integral de linha no percurso  $C_3$  é então

$$\int_0^1 (3x+x)\hat{i} \cdot (\hat{i} + \hat{j}) dx = \int_0^1 4x dx = 2$$

Como o integral é diferente nos 3 percursos considerados, a força  $\vec{F}$  não é conservativa.

---

No exemplo 6.1 foi possível calcular o integral de linha do peso, sem conhecer a equação da trajetória parabólica da bala de canhão, nem ter de calcular a componente tangencial da força, porque como o peso  $\vec{P}$  é sempre na direção de  $\hat{k}$ , o produto escalar  $\vec{P} \cdot d\vec{r}$  é sempre igual a  $P dz$ , para qualquer deslocamento em qualquer direção, e o integral de linha reduz-se a um integral ordinário numa única variável.

Em geral, sempre que o produto escalar  $\vec{F} \cdot d\vec{r}$  dependa de uma única variável, a força  $\vec{F}$  é conservativa porque o integral de linha reduz-se a um integral ordinário e o resultado depende apenas dos valores dessa variável, nas posições inicial e final. As secções seguintes mostram alguns exemplos.

### 6.2.1. Energia potencial gravítica

Usando um sistema de coordenadas em que o eixo dos  $z$  é vertical e aponta para cima, o peso é

$$\vec{P} = -m g \hat{k} \quad (6.16)$$

o produto escalar  $\vec{P} \cdot d\vec{r}$  é igual a  $-m g dz$ . Ou seja, o peso é uma força conservativa e a energia potencial gravítica pode ser definida por:

$$U_g(\vec{r}) = - \int_0^z (-m g) dz \implies \boxed{U_g = m g z} \quad (6.17)$$

Isto é, a energia potencial gravítica de um corpo num ponto é igual ao produto do seu peso e a altura do ponto. As alturas podem medir-se a partir de qualquer ponto escolhido como referencia.

### 6.2.2. Energia potencial elástica

Quando uma mola elástica é alongada ou comprimida, exerce uma força elástica  $F_e$  nos dois extremos, no sentido que faz regressar a mola à sua forma original. Se  $s$  é a elongação da mola, igual ao seu comprimento atual menos o comprimento que teria quando não estiver nem alongada nem comprimida, o valor absoluto de  $F_e$  é diretamente proporcional a  $s$

$$|F_e| = k s \quad (6.18)$$

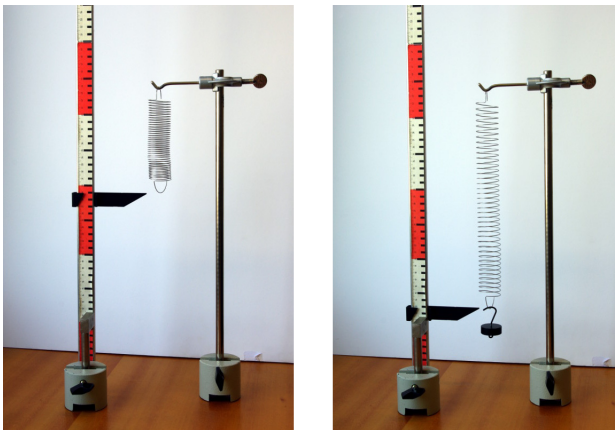


Figura 6.2.: Mola elástica pendurada dum suporte horizontal.

onde  $k$  é a constante elástica da mola. A equação 6.18 chama-se **lei de Hooke**.

A figura 6.2 mostra um procedimento usado para medir a constante elástica de uma mola. Pendura-se um objeto com peso  $P$ , que estica a mola até ficar numa posição em que a força elástica equilibra o peso e mede-se a elongação; o valor da constante elástica é o peso usado,  $P$ , dividido pela elongação.

No sistema da figura 6.3, o cilindro pode deslocar-se ao longo de uma barra fixa e está ligado a uma mola com o outro extremo fixo num ponto fixo O. Em cada posição P do cilindro a elongação  $s$  da mola considera-se positiva se a mola estiver esticada, ou negativa se a mola estiver comprimida; como tal, se o vetor  $\hat{e}_s$  aponta no sentido em que  $s$  aumenta, o valor da força elástica é  $F_e = -k s$  (faz diminuir  $s$  quando é positiva ou aumentar quando é negativa). O produto escalar

$$\vec{F}_e \cdot d\vec{r} = -k s \hat{e}_s \cdot d\vec{r} = -k s ds \quad (6.19)$$

depende unicamente da variável  $s$  e, por isso, a força elástica é conservativa.

Usando como referência o valor  $s = 0$  (posição em que a mola não exerce nenhuma força) a energia potencial elástica é:

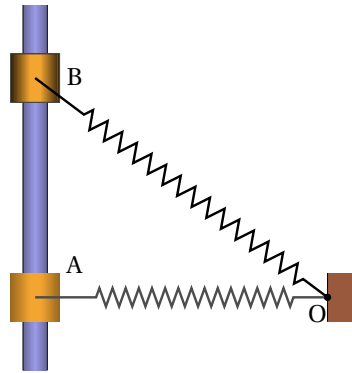
$$U_e = - \int_0^s (-k s) ds \quad \Rightarrow \quad U_e = \frac{1}{2} k s^2 \quad (6.20)$$

### 6.2.3. Energia potencial de forças centrais

Uma força central é uma força que depende da posição e em cada ponto do espaço aponta na direção radial (reta que passa pela origem e pelo ponto) e com valor que depende unicamente da distância  $r$  até a origem:

$$\vec{F}_c = f(r) \hat{r} \quad (6.21)$$

Como o produto vetorial  $\vec{F}_c \cdot d\vec{r} = f(r) dr$  depende unicamente da variável  $r$ , as forças centrais são sempre conservativas e a energia potencial



**Figura 6.3.:** Sistema com mola.

associada é igual a:

$$U_c = - \int_{\infty}^r f(r) dr \quad (6.22)$$

O ponto de referência costuma ser colocado no infinito, porque estas forças costumam ser zero quando a distância  $r$  é infinita. Dois exemplos de forças centrais são a força gravítica entre partículas e a força elétrica entre cargas pontuais.

### 6.3. Energia mecânica

As forças que não são função unicamente da posição não são conservativas. Por exemplo a reação normal e a força de atrito estático sobre um corpo são reações, que dependem das condições em que se encontra o sistema; colocando o mesmo corpo na mesma posição de uma mesa, mas com diferentes objetos colocados por cima, a reação normal tem valores diferentes. A força de atrito cinético também não é conservativa. Depende da reação normal e também depende da direção do movimento (direção da velocidade).

No teorema do trabalho e a energia cinética (equação 6.5), a resultante das forças externas pode ser escrita como a resultante de todas as forças conservativas mais a resultante de todas as forças não conservativas.

$$\int_{s_1}^{s_2} F_t^c ds + \int_{s_1}^{s_2} F_t^{nc} ds = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad (6.23)$$

o lado direito é a energia cinética na posição final menos a energia cinética na posição inicial:  $E_c(s_2) - E_c(s_1)$ . O primeiro integral no lado esquerdo é igual à soma dos integrais de todas as forças externas conservativas que atuam no sistema e é igual à diminuição da energia potencial total:

$$\int_{s_1}^{s_2} F_t^c ds = U(s_1) - U(s_2) \quad (6.24)$$

onde  $U$  é a soma de todas as energias potenciais que existam (gravítica, elástica, elétrica, etc.). Passando esses termos para o lado direito da equação obtém-se:

$$\int_{s_1}^{s_2} F_t^{nc} ds = E_c(s_2) + U(s_2) - E_c(s_1) - U(s_1) \quad (6.25)$$

Define-se a **energia mecânica** igual à soma da energia cinética mais potencial, em qualquer posição da trajetória:

$$E_m = E_c + U \quad (6.26)$$

e a equação anterior é o **teorema do trabalho e a energia mecânica**

$$\int_{s_1}^{s_2} F_t^{\text{nc}} ds = E_m(s_2) - E_m(s_1) \quad (6.27)$$

O integral no lado esquerdo é o trabalho realizado por todas as forças externas não conservativas, ao longo da trajetória; ou seja,

*O trabalho realizado pelas forças não conservativas, a longo da trajetória, é igual ao aumento da energia mecânica  $E_m$ .*

Uma consequência desse resultado é a **lei de conservação da energia mecânica**: quando todas as forças que realizam trabalho são conservativas, a energia mecânica do sistema permanece constante.

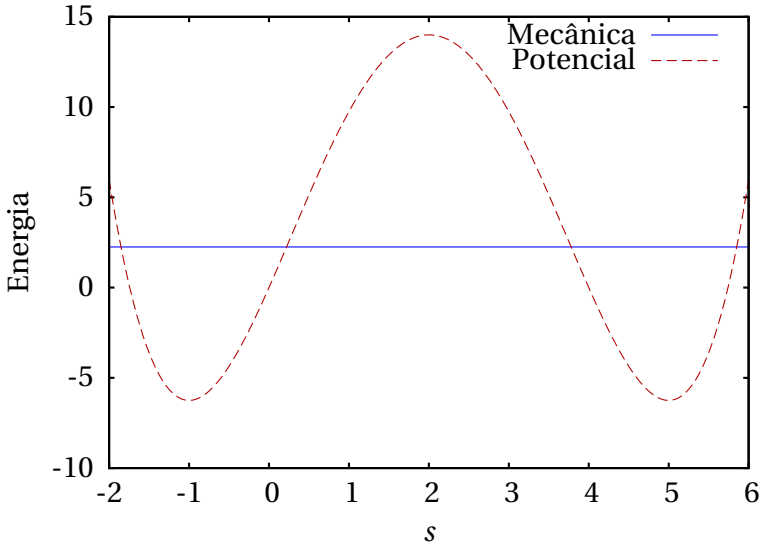
Observe-se que no integral do lado esquerdo da equação 6.27 o percurso de integração é a trajetória do corpo. Pode acontecer que a trajetória não seja conhecida previamente, mas de qualquer forma é uma curva única e bem definida. Se o integral de linha fosse calculado num percurso diferente à trajetória, o seu valor já não seria igual ao aumento da energia mecânica. O sinal negativo na definição da energia potencial prende-se ao fato de a energia mecânica ser definida como energia cinética mais potencial.

Observe-se ainda que, como a energia cinética nunca pode ser negativa, a energia mecânica  $E_m$  (potencial mais cinética) em qualquer posição da trajetória é sempre maior ou igual que à energia potencial nessa posição.

### 6.3.1. Gráficos de energia

O gráfico da energia potencial total  $U(s)$  de todas as forças conservativas é muito útil na análise do movimento. A figura 6.4 mostra um exemplo; a curva a tracejado representa a energia potencial total do sistema, em função da posição na trajetória,  $s$ . A reta contínua é a energia mecânica; como é uma reta com ordenada constante, conclui-se que há conservação da energia mecânica e as únicas forças que realizam trabalho são todas conservativas.

As regiões do gráfico onde a reta da energia mecânica está por debaixo da curva de energia potencial são posições onde o sistema nunca pode



**Figura 6.4.:** Exemplo de energia potencial e energia mecânica.

estar, porque a energia mecânica é sempre maior ou igual que a energia potencial. Por exemplo, no caso da figura 6.4, o corpo não pode nunca estar nas posições  $s = 1$ ,  $s = 2$  ou  $s = 3$ . Para poder alcançar essas posições, seria necessário aparecer outra força não conservativa que faça aumentar a energia mecânica.

A equação 6.24 significa que  $U(s)$  é uma primitiva de  $F_t^c$ , com sinal trocado. Assim sendo, conclui-se que

$$F_t^c = -\frac{dU}{ds} \quad (6.28)$$

ou seja, nos intervalos do gráfico de  $U(s)$  onde a função é crescente, a resultante das forças conservativas aponta no sentido negativo de  $s$  e nos intervalos onde  $U(s)$  é decrescente, a força conservativa resultante aponta no sentido positivo de  $s$ .

No caso do exemplo da figura 6.4, nos intervalos  $-2 < s < -1$  e  $2 < s < 5$ , onde a energia potencial é decrescente, a componente tangencial da força conservativa total é positiva, isto é, aponta no sentido em que a posição  $s$  aumenta. Nos intervalos  $-1 < s < 2$  e  $5 < s < 6$  a componente da força é negativa (aponta no sentido em que  $s$  diminui). Nos pontos  $s = -1$ ,  $s = 2$  e  $s = 5$  a componente tangencial da força conservativa resultante é nula.

Esses pontos onde o valor da força é nulo, chamam-se **pontos de equilíbrio**.

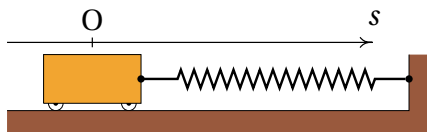
A energia mecânica não pode ser menor que  $-6.75$ . A reta da energia mecânica corresponde a um valor de  $2.25$  unidades. Com essa energia mecânica, o corpo só pode estar a deslocar-se numa vizinhança do ponto  $s = -1$ , ou numa vizinhança do ponto  $5$ .

Nos pontos em que a reta da energia mecânica do corpo corta a curva da energia potencial, a energia cinética é nula e, como tal, a corpo fica em repouso; no entanto, a partícula não permanece sempre em repouso nesses pontos, porque a força nesses pontos não é nula.

Por exemplo, se num instante o corpo está na posição  $s = 5$ , deslocando-se no sentido em que  $s$  aumenta, continua a deslocar-se no mesmo sentido, até parar perto de  $s = 6$ ; nesse ponto a força aponta no sentido negativo de  $s$ , o que faz com que o corpo regresse para o ponto  $s = 5$ , mas agora com velocidade no sentido negativo de  $s$ . O corpo aproximar-se-á do ponto  $s = 3.8$ , onde o valor da sua velocidade será nula; nesse ponto, como a componente tangencial da força é no sentido positivo de  $s$ , o corpo regressa à posição  $s = 5$  começando novamente o mesmo ciclo.

## 6.4. Movimento harmónico simples

Considere-se um carrinho de massa  $m$  sobre uma superfície horizontal, ligado a uma mola com constante elástica  $k$ , tal como mostra a figura 6.5. Se o atrito nos eixos das rodas, a massa das rodas e a resistência do ar são desprezadas, a única força que realiza trabalho é a força elástica da mola e há conservação da energia mecânica.

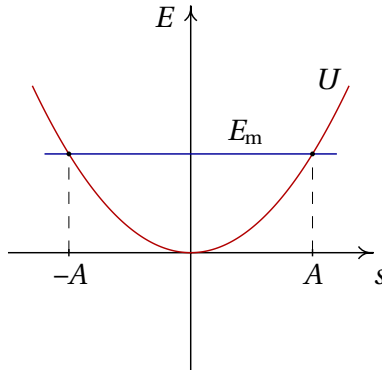


**Figura 6.5.:** Carrinho a oscilar sobre uma superfície horizontal.

A trajetória é uma reta horizontal; escolhendo a origem  $O$  para medir a posição na trajetória,  $s$ , na posição em que a mola não está nem esticada nem comprimida, a energia mecânica do sistema é,

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k s^2 \quad (6.29)$$

A figura 6.6 mostra os gráficos da energia potencial e da energia mecânica constante. O carrinho oscila entre as duas posições  $s = -A$  e  $s = A$ , onde a velocidade é nula, e cada vez que passa pela posição  $s = 0$  a energia cinética é máxima. O valor da **amplitude** do movimento oscilatório é  $A$ , que depende do valor da energia mecânica; quanto maior for a energia, maior a amplitude.



**Figura 6.6.:** Energia potencial e energia mecânica de um oscilador harmônico.

A relação entre a amplitude e a energia mecânica obtém-se substituindo  $v = 0$  na equação 6.29:

$$E_m = \frac{1}{2} k A^2 \quad (6.30)$$

A amplitude e a energia inicial não são valores característicos do oscilador, mas são condições iniciais que dependem de como é colocado em movimento o sistema. A equação de movimento do sistema pode ser obtida aplicando a segunda lei de Newton, ou também derivando a expressão da energia mecânica (equação 6.29) em ordem ao tempo e integrando. O resultado é:

$$a_t = -\frac{k}{m} s \quad (6.31)$$

Resolvendo a equação cinemática  $a_t = v \, dv/ds$ , com condição inicial  $v(s = A) = 0$ , obtém-se  $v$  em função de  $s$

$$v = \pm \sqrt{\frac{k}{m} (A^2 - s^2)} \quad (6.32)$$



igualando essa expressão (no caso em que  $v$  é positiva) à derivada  $\dot{s}$  e separando variáveis, obtém-se

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \int_{t_0}^t dt = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{A^2 - s^2}} \quad (6.33)$$

onde o tempo  $t_0$  é o instante em que o carrinho passa pela posição de equilíbrio  $s = 0$ . Calculando os integrais obtém-se a expressão para a posição  $s$  em função do tempo

$$s = A \sin(\Omega t + \phi_0) \quad (6.34)$$

onde a constante  $\Omega$ , chamada **frequência angular**, é

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6.35)$$

e  $\phi_0$  é uma constante que depende da escolha do instante em que  $t$  é igual a zero. A frequência, que é o número de oscilações por unidade de tempo, é igual a,

$$f = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6.36)$$

e o período de oscilação  $T$  é o inverso da frequência:  $T = 1/f$ .

A expressão 6.34 é a solução da equação diferencial  $\ddot{s} = -(k/m)s$ . Qualquer outro sistema em que a segunda derivada da variável seja igual à variável vezes uma constante negativa, é chamado também um oscilador harmônico simples e a solução será semelhante a 6.34.

## 6.5. Energia cinética de rotação

No movimento de translação de um corpo rígido, em cada instante todas as partes do corpo deslocam-se com a mesma velocidade  $\vec{v}$  e, com tal, a energia cinética total é igual a um meio da massa total vezes o valor da velocidade ao quadrado. No caso mais geral do movimento de rotação sobreposto à translação, para calcular a energia cinética total será necessário ter em conta que as velocidades de diferentes partes do objeto são diferentes. Conforme foi demonstrado no capítulo 3, a velocidade de cada ponto no corpo, em função da velocidade angular  $\vec{\omega}$  e da velocidade  $\vec{v}_O$  de um ponto fixo no corpo rígido, é:

$$\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (6.37)$$

em que  $\vec{r}$  é a posição do ponto relativa ao ponto de referência O.

A energia cinética total obtém-se somando a energia de todas as partes infinitesimais do corpo rígido, com massa  $dm$ ,

$$E_c = \frac{1}{2} \int v^2 dm \quad (6.38)$$

O valor da velocidade ao quadrado é,

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = v_o^2 + |\vec{\omega} \times \vec{r}|^2 + 2 \vec{v}_o \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (6.39)$$

O módulo de  $(\vec{\omega} \times \vec{r})$  é  $\omega R$ , em que  $R$  é a distância desde o ponto até um eixo que passa pelo ponto O, paralelo a  $\vec{\omega}$ . Substituindo na expressão da energia cinética,

$$E_c = \frac{v_o^2}{2} \int dm + \frac{\omega^2}{2} \int R^2 dm + \vec{v}_o \cdot \left( \vec{\omega} \times \int \vec{r} dm \right) \quad (6.40)$$

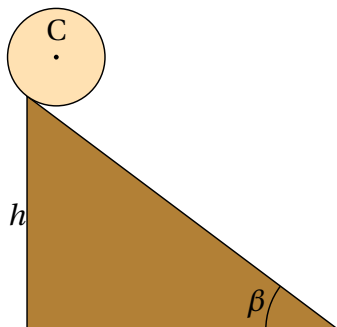
O integral no primeiro termo é igual à massa total  $m$ . Como foi referido na secção sobre o centro de massa, o único referencial em que o valor médio do vetor posição é nulo (equação 5.15) é o referencial em que a origem está exatamente no centro de massa. Assim sendo, se o ponto de referência O for o centro de massa, o terceiro integral será nulo e obtém-se

$$E_c = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 \quad (6.41)$$

em que  $I_{cm}$  é o momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo centro de massa, paralelo a  $\vec{\omega}$ .

### Exemplo 6.3

Uma esfera de massa  $m$  e raio  $R$  parte do repouso a uma altura  $h$  numa rampa inclinada um ângulo  $\beta$  com a horizontal. A esfera roda na rampa, sem deslizar. Determine o valor da aceleração angular da esfera e a velocidade do centro de massa quando a esfera chega ao fim da rampa.



**Resolução.** Como a esfera roda sem deslizar, o ângulo de rotação  $\theta$  está relacionado com a posição do centro de massa C, de acordo com a expressão que foi obtida no capítulo 3 para rodas que rolam sem derrapar:

$$s = R\theta$$

conclui-se então que o sistema tem um único grau de liberdade, que pode ser o ângulo  $\theta$  que a esfera roda desde o instante inicial no topo do plano inclinado. O valor da velocidade angular é  $\omega = \dot{\theta}$  e o valor da velocidade do centro de massa é  $v_{\text{cm}} = R\omega$ .

Escolhendo a posição  $s = 0$  no topo da rampa, com  $s$  positivo no sentido em que a esfera desce e energia potencial gravítica nula em  $s = 0$ , em qualquer posição  $s = R\theta$  a esfera tem descido uma altura  $R\theta \sin \beta$ , em que  $\beta$  é o ângulo de inclinação do plano inclinado. A energia mecânica total é,

$$E_{\text{m}} = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 + \frac{1}{2} I_{\text{cm}} \omega^2 - m g R \theta \sin \beta$$

Enquanto a esfera rode sem derrapar, a força de atrito com a superfície do plano é atrito estático, que não realiza trabalho. Ignorando a resistência do ar, a energia mecânica conserva-se e a sua derivada em ordem ao tempo é nula. Substituindo a expressão do momento de inércia da esfera em relação ao seu centro de massa,  $2 m R^2 / 5$ , na equação anterior, derivando em ordem ao tempo e igualando a zero, obtém-se

$$m R \omega \left( \frac{7}{5} R \alpha - g \sin \beta \right) = 0$$

e a expressão para a aceleração angular  $\alpha$  é,

$$\alpha = \frac{5 g \sin \beta}{7 R}$$

Como a esfera parte do repouso, no ponto inicial a sua energia cinética é nula e na parte mais baixa da rampa a energia cinética será igual à energia potencial gravítica inicial, 0, menos a energia gravítica final,  $-mgh$

$$\frac{1}{2}mR^2\omega^2 + \frac{1}{5}mR^2\omega^2 = mgh \quad (6.42)$$

e a velocidade do centro de massa C no fim da rampa é

$$v_C = R\omega = \sqrt{\frac{10gh}{7}} \quad (6.43)$$

## Perguntas

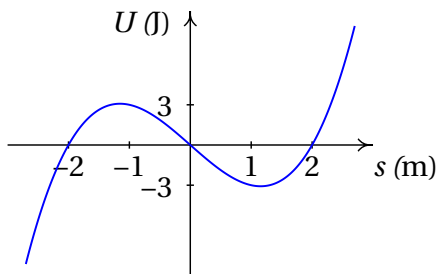
- A posição de uma partícula em função do tempo é dada pela expressão  $\vec{r} = 2t^2\hat{i} + \frac{5}{3}t^3\hat{j}$  (SI). Qual dos vetores na lista é perpendicular à trajetória da partícula no instante  $t = 2$  s?
 

A. $4\hat{i} - 5\hat{j}$	C. $-5\hat{i} + 2\hat{j}$	E. $-2\hat{i} + 3\hat{j}$
B. $2\hat{i} - 5\hat{j}$	D. $5\hat{i} - 4\hat{j}$	
- Sobre uma partícula atua uma força com direção, sentido e módulo constantes. O módulo da força é 1.6 N. Qual é o trabalho realizado por essa força quando a partícula se desloca uma distância de 20 cm numa direção que faz  $60^\circ$  com a força?
 

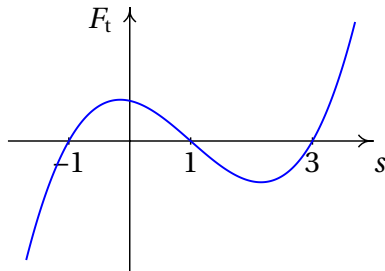
A. 0.28 J	C. 0.68 J	E. 16 J
B. 160 mJ	D. 28 J	
- Num oscilador harmónico simples formado por um corpo de massa  $m$  pendurado numa mola vertical com constante elástica  $k$ , se a massa for quadruplicada, qual das afirmações será correta?
 

A. A frequência duplica.
B. O período duplica.
C. A amplitude duplica.
D. A energia mecânica duplica.
E. A energia potencial duplica.

4. A figura mostra o gráfico da energia potencial  $U(s)$ , de uma partícula em função da posição na trajetória,  $s$ . Se a partícula está a oscilar à volta da posição  $s = 1$ , com energia mecânica igual a 2 J, qual é o valor máximo da sua energia cinética?



- A. -3 J                                      C. 0    E. 5 J  
 B. 3 J                                        D. 2 J
5. A figura mostra o gráfico da força tangencial resultante  $F_t$ , conservativa, sobre uma partícula. Quantos pontos de equilíbrio existem na região apresentada no gráfico?



- A. 0    C. 2    E. 4  
 B. 1    D. 3

## Problemas

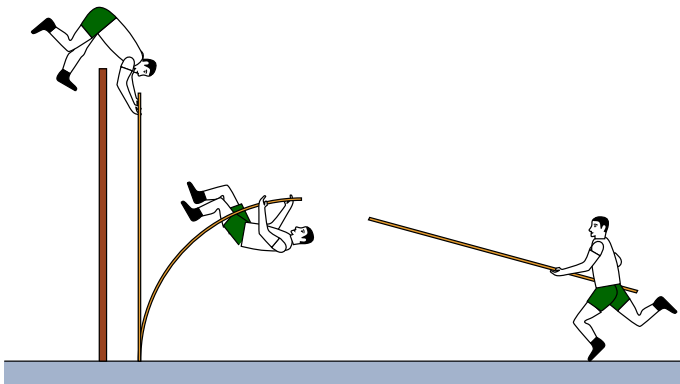
1. Calcule o integral de linha da força do exemplo 6.2:  $\vec{F} = (3x + y) \hat{i}$ , desde a origem O até o ponto P no plano  $xOy$ , com coordenadas  $x = y = 1$ , em que o percurso de integração é o arco mais curto da circunferência  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$  (centro em  $x = 1, y = 0$  e raio 1), que passa pela origem e pelo ponto P.

2. A lei da gravitação universal estabelece que qualquer corpo celeste de massa  $M$  produz uma força atrativa sobre qualquer outro corpo de massa  $m$ , dada pela expressão:

$$\vec{F}_g = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}$$

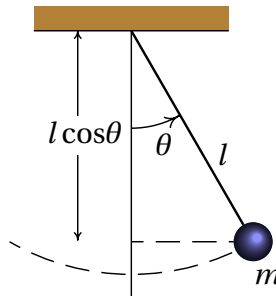
onde  $G$  é a constante de gravitação universal,  $r$  é a distância entre os dois corpos e  $\hat{r}$  é o versor radial, que aponta desde o corpo de massa  $M$  até o corpo de massa  $m$ . (a) Determine a expressão para a energia potencial gravítica  $U_g$  devida ao corpo de massa  $M$ . (b) Tendo em conta o resultado da alínea anterior, como se justifica a equação 6.17,  $U_g = m g z$ , para a energia potencial gravítica de um objeto na Terra?

3. Num salto com vara, um atleta de 70 kg usa uma vara uniforme de 4.5 kg com 4.9 m de comprimento. O salto do atleta tem três fases: primeiro o atleta corre, com o seu centro de gravidade a 1 m de altura e com o centro de gravidade da vara a 1.5 m de altura, até atingir uma velocidade de 9 m/s no instante em que possa a vara no chão. Na segunda fase, a energia da corrida é transferida para a vara, que se deforma e volta a esticar ficando vertical e elevando o atleta até uma altura próxima da altura da fasquia. Finalmente o atleta estica os braços, fazendo com que a reação normal forneça alguma energia adicional que eleva o centro de gravidade do saltador até 5.8 m de altura, conseguindo assim ultrapassar a fasquia a 5.6 m. Admitindo que não existem perdas de energia, calcule qual foi a energia mecânica transferida para o saltador na última fase, quando esticou os braços.



4. Resolva o problema 7 do capítulo 4 aplicando o teorema do trabalho e a energia mecânica. A força exercida pelo bloco sobre o cone, quando o cone penetra no bloco, é uma força conservativa ou não?

5. Num sistema como o da figura 6.5, o carrinho tem massa de 450 g. O carrinho é deslocado 5 cm da posição de equilíbrio e libertado a partir do repouso, começando a oscilar com um período de 1.2 s. Determine:
- A amplitude das oscilações.
  - A constante elástica da mola.
  - A velocidade máxima do carrinho.
6. Um pêndulo simples é composto por uma esfera de massa  $m$ , pendurada de uma corda muito fina, de comprimento  $l$  e massa desprezável. Quando a esfera parte do repouso, há um único grau de liberdade, que pode ser o ângulo  $\theta$  que o fio faz com a vertical. (a) Determine a expressão para a energia mecânica, em função do ângulo  $\theta$  e da sua derivada  $\dot{\theta}$ , arbitrando que a energia potencial é nula em  $\theta = 90^\circ$ . (b) Desprezando a resistência do ar, a energia mecânica permanece constante e a sua derivada em ordem ao tempo é nula; derive a expressão da energia mecânica em ordem ao tempo e iguale a zero para encontrar a expressão para  $\ddot{\theta}$  em função do ângulo.

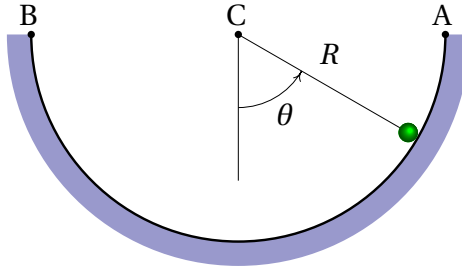


7. Uma esfera de raio  $r$  roda, sem deslizar, dentro de uma calha semicircular de raio  $R$ , que está num plano vertical (ver figura).
- Demonstre que, em função da derivada do ângulo  $\theta$ , a energia cinética da esfera é

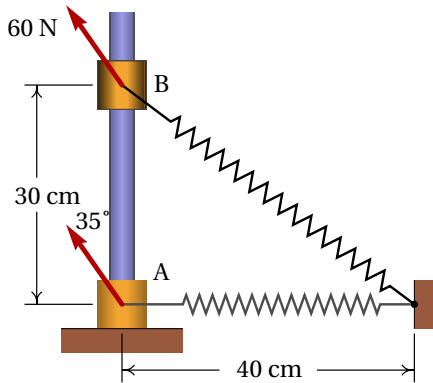
$$E_c = \frac{7}{10} m (R - r)^2 \dot{\theta}^2$$

- Desprezando a resistência do ar, a energia mecânica é constante e a sua derivada em ordem ao tempo é nula; derive a expressão da energia mecânica em ordem ao tempo e iguale a zero para encontrar a expressão da aceleração angular  $\ddot{\theta}$  em função do ângulo.
- Entre que valores deve estar a energia mecânica para que a esfera permaneça oscilando dentro da calha?
- A partir do resultado da alínea b, determine a expressão para  $\ddot{\theta}$ ,

no limite quando o raio da esfera é muito menor que o raio da calha ( $R - r \approx R$ ) e explique porque o resultado é diferente do resultado obtido para o pêndulo simples no problema 6.



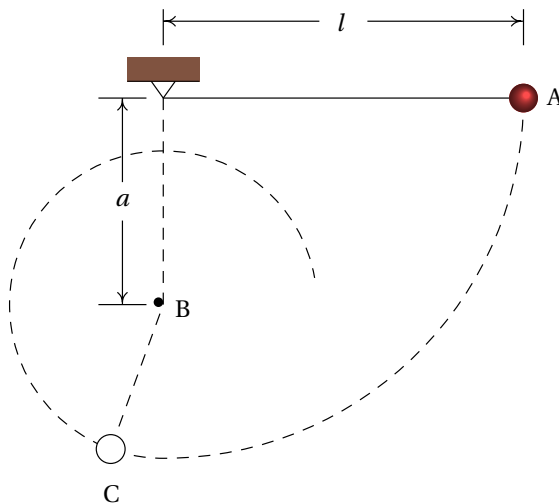
8. Um cilindro com massa de 80 g desliza a partir do repouso, no ponto A, até ao ponto B, devido a uma força externa constante de 60 N; o comprimento normal da mola é 30 cm e a sua constante elástica é 6 N/cm. Admitindo que não existe atrito com a barra fixa, calcule a velocidade com que o cilindro chega ao ponto B.



9. Resolva o problema 13 do capítulo 5 aplicando o princípio de conservação da energia mecânica.
10. Um cilindro desce uma rampa de altura  $h$ , a partir do repouso, rodando à volta do seu eixo sem deslizar. Calcule a velocidade do centro de massa do cilindro quando chega ao fim da rampa. Compare com o resultado do exemplo 6.3 para uma esfera; qual dos dois corpos desce mais rápido, a esfera ou o cilindro?
11. Uma esfera pendurada com uma corda de comprimento  $l$  parte do repouso na posição A, como mostra a figura. Quando a corda chega à posição vertical, entra em contacto com um prego fixo no ponto B, que faz com que a esfera descreva um arco de raio menor que  $l$ . Calcule o valor mínimo que deve ter  $a$  para que a trajetória da esfera seja uma



circunferência com centro em B (se  $a$  não for suficientemente grande, a corda deixa de estar esticada quando a esfera sobe e a esfera não chega até a parte mais alta do círculo).



12. Considere um projétil que é lançado desde o chão, num quarto onde existe vácuo, com uma velocidade inicial  $v_0$  que faz um ângulo  $\theta$  com a horizontal.

(a) Calcule o tempo que o projétil demora até chegar ao ponto máximo da sua trajetória, onde a velocidade vertical é nula, e a posição nesse ponto.

(b) Com base no resultado da alínea anterior, demonstre que o alcance horizontal do projétil (distância horizontal desde onde é lançado até onde cai) é igual a:

$$R = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} \quad (6.44)$$

## Respostas

**Perguntas:** 1. C. 2. B. 3. B. 4. E. 5. D.

### Problemas

1.  $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} \approx 2.29$

2. (a)  $U_g = -\frac{GMm}{r}$

(b) Para um valor qualquer  $r_0$ , a série de Taylor de  $U_g$  é:

$$-\frac{GMm}{r_0} + \frac{GMm}{r_0^2}(r - r_0) - \dots$$

O primeiro termo é uma constante, que pode ser ignorada; no segundo termo, se  $r_0$  for o raio da Terra,  $r - r_0$  será a altura  $z$  desde a superfície da Terra e  $GM/r_0^2$  será igual à constante  $g$ . Ignorando o resto da série, que para valores de  $z$  muito menores que  $r_0$  não altera significativamente a soma dos dois primeiros termos, obtém-se  $U_g \approx mgz$ .

3. 317.4 J
4. 24 696 N/m<sup>2</sup>. A força do bloco não é conservativa, porque só atua quando o cone está a penetrar; se o cone voltasse a subir, após ter penetrado no bloco, o bloco já não produzia força sobre o cone.
5. (a) 5 cm. (b) 12.34 N/m. (c) 26.2 cm/s.
6. (a)  $E_m = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - m g l \cos \theta$  (b)  $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$
7. (a) Observe que a velocidade do centro de massa da esfera é  $(R - r) \dot{\theta}$  e a condição de rodamento sem deslizamento implica que a velocidade angular da esfera é igual a essa velocidade dividida por  $r$ . (b)  $\ddot{\theta} = -\frac{5g}{7(R-r)} \sin \theta$   
 (c) Maior que  $-mg(R - r)$  e menor que zero; se a energia mecânica é exatamente igual a  $-mg(R - r)$ , a esfera não oscila, mas permanece em repouso no ponto mais baixo da calha. (d) O valor absoluto de  $\ddot{\theta}$  é menor num fator 5/7, devido a que parte da energia potencial gravítica é transformada em energia cinética de rotação da esfera. A energia cinética de rotação é sempre 2/5 da energia cinética de translação, independentemente do valor de  $r$ ; assim sendo, no limite  $r \rightarrow 0$  também 2/7 da energia gravítica são convertidos em energia de rotação e apenas os restantes 5/7 fazem aumentar  $\theta$ .
8. 11.74 m/s.
9. 5.274 s<sup>-1</sup>
10.  $\sqrt{\frac{4gh}{3}}$ . A esfera desce mais rápido que o cilindro, por ter menor momento de inércia.
11.  $\frac{3l}{5}$
12. (a)  $t = v_0 \sin \theta / g$ ,  $\vec{r} = \frac{v_0^2}{2g} (\sin(2\theta) \hat{i} + \sin^2 \theta \hat{j})$