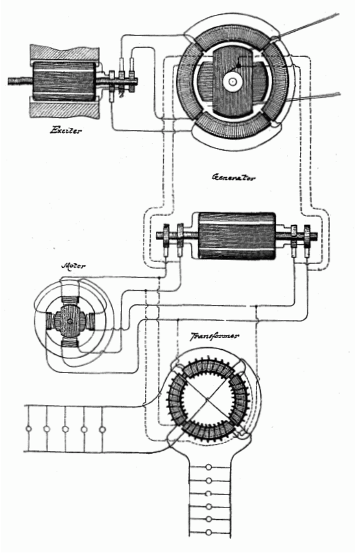
11. Circuitos de corrente alternada



No fim da década de 1880 viveu-se nos Estados Unidos da América um período conhecido como a *Guerra das Correntes*. Nessa época já existia uma rede elétrica pública, usada principalmente para alimentar lâmpadas incandescentes e motores elétricos. A exploração dessa rede elétrica revertia grandes benefícios a Thomas A. Edison que tinha obtido várias patentes pela invenção da lâmpada e de vários dispositivos para gerar corrente contínua. Outras pessoas tentaram entrar nesse novo negócio milionário com as suas inovações; George Westinghouse, que já tinha tido sucesso comercial com as suas próprias patentes, contratou Nicola Tesla, um cientista brilhante, imigrante da Croácia. Tesla obteve uma patente pelo dispositivo esquematizado acima, utilizado para produzir e distribuir corrente alternada. A guerra das correntes acabaria por ser ganha pelo sistema de corrente alternada de Tesla e Westinghouse; uma das principais vantagens sobre o sistema de corrente contínua de Edison é a facilidade de poder aumentar ou diminuir a tensão por meio de transformadores.

11.1. Circuito LC

No circuito do lado esquerdo da figura 11.1, o interruptor S_1 está fechado (há muito tempo) e o interruptor S_2 aberto. Num instante, $t = 0$, abre-se o interruptor S_1 e, simultaneamente, fecha-se o interruptor S_2. Como tal, em $t \geq 0$ o circuito equivalente é o representado no lado direito da figura 11.1, denominado circuito LC.

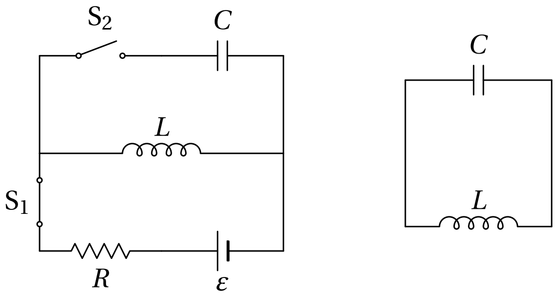


Figura 11.1.: Circuito LC, em $t < 0$ (esquerda) e circuito equivalente em $t \geq 0$ (direita), com S_1 aberto e S_2 fechado.

A impedância do condensador é $1/(C\,s)$ e a do indutor $L\,s$. A transformada da voltagem no indutor, $\tilde{V}$, não é simplesmente $Z\,\tilde{I}$, porque no instante $t = 0$ a corrente que o percorre não é nula. No domínio do tempo, a relação entre a voltagem e a corrente no indutor é,

$$V = L\frac{\mathrm{d}\,I}{\mathrm{d}\,t} \tag{11.1}$$

e a transformada de Laplace é então:

$$\tilde{V} = L\left(s\,\tilde{I} - I_0\right) \tag{11.2}$$

No condensador não há que acrescentar nenhum termo adicional, porque a sua carga inicial é nula; a transformada da voltagem no condensador é $Z\,\tilde{I} = \tilde{I}/(C\,s)$. A lei das malhas conduz à equação:

$$L\left(s\,\tilde{I} - I_0\right) + \frac{\tilde{I}}{C\,s} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad s^2\,\tilde{I} - s\,I_0 = -\frac{\tilde{I}}{L\,C} \tag{11.3}$$

Esta equação algébrica é a transformada de Laplace da equação diferencial (observe-se que $I_0' = 0$, porque o circuito está no estado estacionário no instante em $t = 0$):

$$I'' = -\frac{I}{LC} \tag{11.4}$$

que é a equação de um **oscilador harmónico simples**. O polinómio caraterístico dessa equação linear tem duas raízes imaginários $\pm \mathrm{i}\sqrt{1/(LC)}$ e a solução da equação é

$$I(t) = I_0 \cos(\omega\, t) \tag{11.5}$$

em que ω é a frequência angular do circuito,

$$\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \tag{11.6}$$

A carga no condensador, em função do tempo, é

$$Q(t) = C\,\Delta V = -C\,L\,\frac{\mathrm{d}\,I}{\mathrm{d}\,t} = \frac{I_0}{\omega}\sin(\omega\, t) \tag{11.7}$$

e como tal, a corrente e a carga oscilam com frequência $f = \omega/(2\,\pi)$, desfasadas 180°, de forma que quando uma delas é nula, a outra tem o seu valor absoluto máximo (figura 11.2).

A corrente 11.5 chama-se **corrente alternada** e a carga 11.7 é uma carga alternada. No capítulo sobre indução eletromagnética estudou-se também um gerador que produz tensão alternada (equação 9.10). Em geral, uma função alternada é uma função periódica com valor médio igual a zero; a carga e a corrente no circuito LC, assim como a tensão do gerador de tensão alternada, são 3 exemplos particulares em que a função alternada é ou seno ou cosseno.

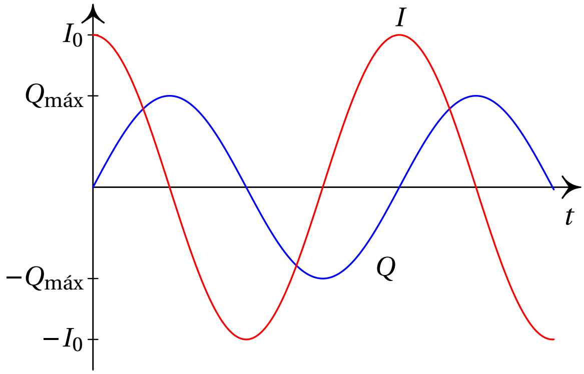


Figura 11.2.: Corrente e carga no circuito LC ($Q_{\text{máx}} = I_0/\omega$).

11.2. Funções sinusoidais

Uma **função sinusoidal** $F(t)$ é uma função alternada que oscila entre dois valores $-F_{\text{máx}}$ e $F_{\text{máx}}$ e tem a mesma forma da função seno ou cosseno, como mostra a figura 11.3. Basta saber os valores das 3 distâncias T, $F_{\text{máx}}$ e $t_{\text{máx}}$ referidas na figura, para caraterizar cada uma dessas funções.

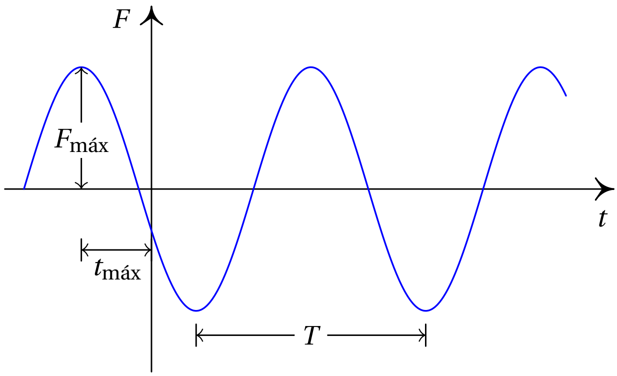


Figura 11.3.: Função sinusoidal com período T e valor máximo $F_{\text{máx}}$.

O intervalo T entre dois máximos ou dois mínimos consecutivos é o **período** da função e o seu inverso, $f = 1/T$, é a **frequência**.

Designando por $t_{\text{máx}}$ o valor absoluto da coordenada t onde a função atinge o seu valor máximo $F_{\text{máx}}$, pela última vez antes de $t = 0$, define-se a **fase** da função como:

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t_{\text{máx}}}{T}\right) \tag{11.8}$$

Uma função sinusoidal também pode ser caraterizada pelo seu valor máximo $F_{\text{máx}}$ (chamado amplitude), a sua fase φ e a sua frequência angular: ω, definida por:

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}} \tag{11.9}$$

As funções sinusoidais têm todas a forma geral:

$$F(t) = F_{\text{máx}} \cos\left(\omega\, t + \varphi\right) \tag{11.10}$$

Note-se que é possível representar a mesma função de várias formas. Pode-se substituir o cosseno por seno e subtrair $\pi/2$ à fase, sem alterar o resultado.

Pode-se também inverter os sinais da frequência angular e da fase, simultaneamente, e ainda somar ou subtrair qualquer múltiplo de 2π à fase. No entanto, para facilitar a caraterização dessas funções, usaremos apenas a função cosseno, frequências angulares positivas e fases no intervalo $[0, 2\pi[$. Essas 3 escolhas, embora arbitrárias, são habituais.

Duas funções sinusoidais que não tenham o mesmo valor máximo, fase e frequência angular, são necessariamente diferentes. E duas funções sinusoidais com a mesma frequência angular terão, necessariamente, a mesma frequência e o mesmo período.

11.3. Fasores

As funções sinusoidais com a forma 11.10 podem ainda ser escritas usando a fórmula de Euler e a função $\text{Re}(z)$ que extrai a parte real de um número complexo z:

$$F_{\text{máx}} \cos\left(\omega\, t + \varphi\right) = \text{Re}\left(F_{\text{máx}}\, e^{i(\omega\, t+\varphi)}\right) = \text{Re}\left(F_{\text{máx}}\, e^{i\varphi}\, e^{i\omega\, t}\right) \tag{11.11}$$

Esta forma facilita a identificação de uma propriedade importante na soma de duas funções sinusoidais com diferentes valores máximos e fases, mas com a mesma frequência:

$$\begin{aligned} \text{Re}\left(F_{\text{máx}}\, e^{i\varphi}\, e^{i\omega\, t}\right) + \text{Re}\left(G_{\text{máx}} e^{i\phi}\, e^{i\omega\, t}\right) &= \\ \text{Re}\left(F_{\text{máx}}\, e^{i\varphi}\, e^{i\omega\, t} + G_{\text{máx}}\, e^{i\phi}\, e^{i\omega\, t}\right) &= \\ \text{Re}\left(\left(F_{\text{máx}}\, e^{i\varphi} + G_{\text{máx}}\, e^{i\phi}\right) e^{i\omega\, t}\right) & \end{aligned} \tag{11.12}$$

Ou seja, a soma de duas funções sinusoidais com a mesma frequência é também uma função sinusoidal com a mesma frequência.

Quando se trabalha com várias funções sinusoidais, todas com a mesma frequência, podem-se admitir implicitamente a função Re() e a parte que depende do tempo, $e^{i\omega\, t}$, representando cada função pelos números complexos que multiplicam essa exponencial:

$$\mathbf{F} = F_{\text{máx}}\, e^{i\varphi}, \qquad \mathbf{G} = G_{\text{máx}}\, e^{i\phi}, \qquad \mathbf{H} = H_{\text{máx}}\, e^{i\psi} \ldots \tag{11.13}$$

Essas expressões complexas que definem o valor máximo e a fase das funções sinusoidais são denominadas **fasores**. O uso de letras negritas é porque estes objetos têm algumas das propriedades dos vetores e dos números complexos, mas não são realmente nem vetores nem números complexos.

Mais concretamente, a soma de duas funções sinusoidais com a mesma frequência é outra função sinusoidal da mesma frequência, e o respetivo fasor é obtido somando os números complexos ou os vetores que representam os fasores das funções somadas (ver exemplo abaixo). No entanto, como o produto entre duas funções sinusoidais com a mesma frequência é igual a uma função constante mais uma função sinusoidal com o dobro da frequência, o produto entre fasores não pode ser definido pelo simples produto entre números complexos nem pelo produto entre vetores (na secção 11.6 explica-se como obter o produto entre funções sinusoidais). Como tal, os fasores são outro tipo de objetos diferentes dos números complexos e dos vetores.

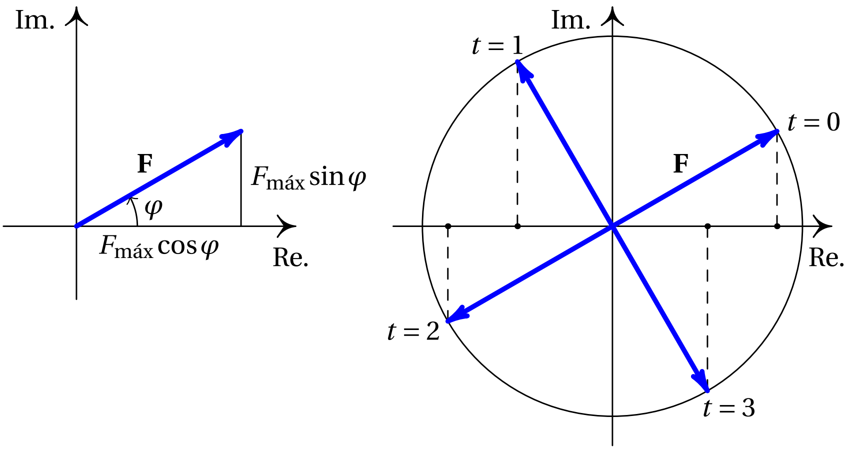


Figura 11.4.: Representação gráfica de um fasor **F**.

Outra forma útil de representar os fasores consiste em escrever o valor máximo e a fase separados pelo símbolo de ângulo: $\mathbf{F} = F_{\text{máx}} \angle\varphi$. É também útil a representação vetorial no plano, em que em $t = 0$ o fasor é um vetor desde a origem até o ponto $(F_{\text{máx}} \cos(\varphi),\ F_{\text{máx}} \sin(\varphi))$, como mostra a figura 11.4. Em $t > 0$, esse vetor roda um ângulo igual a $\omega\, t$, terminando no ponto $(F_{\text{máx}} \cos(\omega\, t + \varphi),\ F_{\text{máx}} \sin(\omega\, t + \varphi))$. Ou seja, o vetor que representa o fasor no plano roda no sentido anti-horário, com velocidade angular constante ω. O valor da função sinusoidal (parte real) é a projeção desse vetor no eixo horizontal. Enquanto o vetor roda no plano, o valor da função oscila entre $F_{\text{máx}}$ e $-F_{\text{máx}}$.

Exemplo 11.1
Num nó num circuito de corrente alternada entram duas correntes e saem outras duas correntes. Sabendo que as expressões das correntes que entram são $\sqrt{2}\,\sin(\omega\,t + \pi/4)$ e $2\sqrt{2}\,\cos(\omega\,t + \pi/4)$, e uma das correntes que sai é $(3 - \sqrt{3})\,\cos(\omega\,t)$, calcule a outra corrente que sai, indicando o seu valor máximo e a sua fase.

Resolução. Em termos matemáticos, o que está a ser pedido é o cálculo de

$$\sqrt{2}\sin\left(\omega\,t + \frac{\pi}{4}\right) + 2\sqrt{2}\cos\left(\omega\,t + \frac{\pi}{4}\right) - (3 - \sqrt{3})\,\cos(\omega\,t)$$

de forma a obter uma única função cosseno.

Começando por escrever os fasores das 3 correntes, no caso da primeira corrente é necessário subtrair $\pi/2$ à fase, para substituir o seno por cosseno. O fasor da quarta corrente é a soma dos dois primeiros fasores, subtraído do terceiro:

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_4 &= \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3 \\ &= \left(\sqrt{2}\angle -\frac{\pi}{4}\right) + \left(2\sqrt{2}\angle\frac{\pi}{4}\right) - \left(3 - \sqrt{3}\right)\angle 0\end{aligned}$$

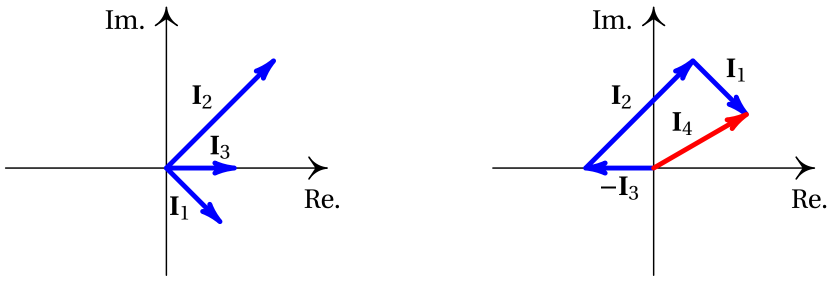


Figura 11.5.: Soma de fasores.

A seguir, calculam-se as partes real e imaginária de cada fasor, tarefa que é facilitada usando a representação gráfica (lado esquerdo na figura 11.5).

O fasor da quarta corrente é então:

$$\mathbf{I}_4 = (1 - \mathrm{i}) + (2 + \mathrm{i}\,2) - (3 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} + \mathrm{i}$$

O valor máximo desse fasor é a hipotenusa do triângulo retângulo com catetos de $\sqrt{3}$ e 1 unidades, nomeadamente $I_{\text{máx}} = 2$. A fase é o ângulo oposto ao cateto de comprimento 1 nesse triângulo retângulo, $\varphi = \arctan(1/\sqrt{3}) = \pi/6$. O resultado obtido é:

$$I_4 = 2\cos\left(\omega\, t + \frac{\pi}{6}\right)$$

Embora os fasores não sejam verdadeiros vetores, somam-se exatamente como se fossem vetores, somando coordenadas, ou geometricamente, como no lado direito da figura 11.5.

11.4. Tensão alternada

Uma tensão alternada é um sinal sinusoidal dado por:

$$\boxed{V = V_{\text{máx}} \cos(\omega\, t + \varphi)} \tag{11.14}$$

Nos diagramas de circuito, uma fonte ideal de tensão alternada representa-se pelo símbolo indicado na figura 11.6. Junto do símbolo indica-se a tensão máxima e pode também indicar-se a frequência ou a fase. Os valores apresentados na figura são os que estão em uso na rede elétrica pública da União Europeia: frequência f de 50 Hz e tensão máxima de 325 V.

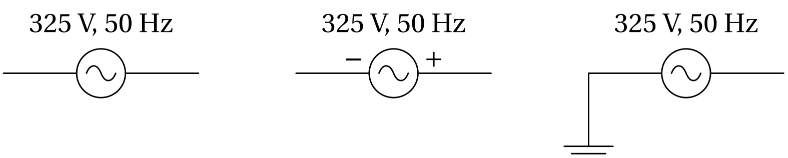


Figura 11.6.: Três formas de representar uma fonte ideal de tensão alternada com tensão máxima de 325 V e frequência de 50 Hz.

Se no diagrama identificam-se os terminais com os sinais + e −, isso quererá dizer que a expressão dada para a tensão na fonte representa a diferença de potencial entre o terminal identificado com o sinal + e o terminal com o sinal −. Observe-se que essa diferença de potencial muda de sinal periodicamente e em alguns intervalos o potencial no terminal − passa a ser maior do que no terminal +. Por vezes utiliza-se também uma ligação à terra e, nesse caso, não é necessário indicar sinais mas admite-se que a expressão dada para a tensão da fonte é a diferença de potencial do terminal que não está ligado à terra menos o potencial na terra, que costuma ser arbitrado igual a zero.

11.5. Impedância complexa

Se todas as fontes de tensão num circuito forem fontes de tensão alternada com a mesma frequência, em qualquer parte do circuito a tensão é também alternada, com a mesma frequência, já que a regra das malhas garante que a tensão é igual à soma das outras tensões na mesma malha, com sinal oposto e conclui-se que se a tensão em algum segmento da malha é sinusoidal, a tensão em qualquer outro segmento também será sinusoidal e com a mesma frequência.

No capítulo anterior deduziu-se a lei de Ohm generalizada para as transformadas de Laplace da tensão e da corrente (equação 10.28):

$$\tilde{V}(s) = Z(s)\,\tilde{I}(s) \tag{11.15}$$

Como V é uma função sinusoidal, a sua transformada de Laplace é (ver o apêndice C):

$$\tilde{V}(s) = \frac{\mathbf{V}}{s - \mathrm{i}\omega} \tag{11.16}$$

com tal,

$$\tilde{I}(s) = \frac{\mathbf{V}}{(s - \mathrm{i}\omega)\,Z(s)} \tag{11.17}$$

Admitindo que $Z(\mathrm{i}\omega)$ não é igual a zero, a expansão em frações parciais da expressão no segundo membro deve incluir um termo com denominador $(s - \mathrm{i}\omega)$

$$\tilde{I}(s) = \frac{\mathbf{I}}{s - \mathrm{i}\omega} + \tilde{I}_{\text{trans}}(s) \tag{11.18}$$

em que o termo $\tilde{I}_{\text{trans}}$ é a corrente transitória, que não tem nenhum fator $(s - \mathrm{i}\omega)$ no denominador.

Substituindo essa expressão e a transformada da tensão na lei de Ohm generalizada, obtém-se:

$$\frac{\mathbf{V}}{s - \mathrm{i}\omega} = Z(s)\left(\frac{\mathbf{I}}{s - \mathrm{i}\omega} + \tilde{I}_{\text{trans}}\right) \tag{11.19}$$

Multiplicando ambos os membros da equação por $(s - \mathrm{i}\omega)$ e substituindo s por $\mathrm{i}\omega$ obtém-se:

$$\boxed{\mathbf{V} = Z(\mathrm{i}\omega)\,\mathbf{I}} \tag{11.20}$$

Ou seja, os fasores da tensão e da corrente também verificam a lei de Ohm generalizada, com a frequência real s substituída por uma frequência imaginária $\mathrm{i}\omega$, o que conduz a uma **impedância complexa** $Z(\mathrm{i}\omega)$. Alguns autores preferem chamar $Z(\mathrm{i}\omega)$ simplesmente impedância; também pode-se usar a notação $Z(\omega)$, em vez de $Z(\mathrm{i}\omega)$, mas $Z(\mathrm{i}\omega)$ mostra em forma explícita a sua relação com a impedância generalizada $Z(s)$.

A impedância complexa $Z(\mathrm{i}\omega)$ é uma função complexa que pode ser dividida nas suas partes real e imaginária:

$$\boxed{Z(\mathrm{i}\omega) = R(\omega) + \mathrm{i}\,X(\omega)} \tag{11.21}$$

sendo a função real $R(\omega)$ designada de **resistência** e a função real $X(\omega)$ designada de **reatância**. A resistência é sempre positiva, independentemente da frequência angular ω, enquanto que a reatância pode ser positiva para algumas frequências (**reatância indutiva**) e negativa para outras frequências (**reatância capacitiva**).

Para um determinado valor de ω, o módulo $|Z|$ e fase φ_Z da impedância complexa $Z(\mathrm{i}\omega)$ podem ser calculados usando a representação gráfica de $R + \mathrm{i}\,X$ no plano complexo, obtendo-se o **triângulo de impedância** apresentado na figura 11.7. Como R não pode ter valores negativos, o ângulo φ_Z situa-se sempre entre $-\pi/2$ e $\pi/2$ radianos.

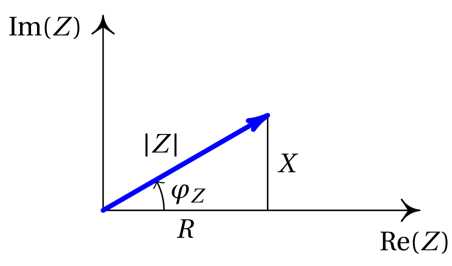


Figura 11.7.: Triângulo de impedância, com a resistência R e a reatância X nos catetos.

Note-se que a impedância complexa $Z(\mathrm{i}\omega)$ não é um fasor mas sim um número complexo ordinário, que pode ser multiplicada e somada a outras impedâncias usando as regras do produto e a adição de números complexos. Também se pode multiplicar ou dividir um fasor por várias impedâncias e o resultado é outro fasor com a mesma frequência.

Se os fasores da tensão e da corrente forem $V_{\text{máx}}\angle\varphi_V$ e $I_{\text{máx}}\angle\varphi_I$, a lei de Ohm para fasores (equação 11.20) resulta em:

$$V_{\text{máx}}\angle\varphi_V = (|Z|\, I_{\text{máx}})\angle(\varphi_Z + \varphi_I) \tag{11.22}$$

podendo-se portanto separar a equação complexa 11.20 em duas equações reais:

$$V_{\text{máx}} = |Z|\, I_{\text{máx}} \qquad \varphi_V = \varphi_Z + \varphi_I \tag{11.23}$$

11.5.1. Resistências

Numa resistência, a impedância generalizada é independente da frequência e igual a R; como tal, o módulo da impedância complexa é $|Z| = R$ e a sua fase é nula $\varphi_Z = 0$. As equações 11.23 indicam que as fases de **V** e **I** são iguais e os seus valores máximos verificam a relação,

$$V_{\text{máx}} = R\, I_{\text{máx}} \tag{11.24}$$

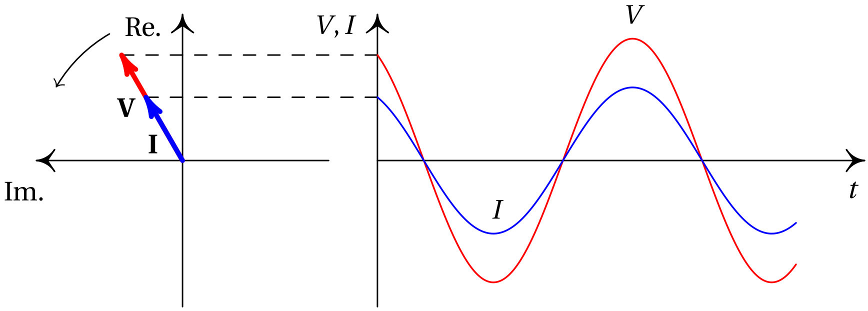


Figura 11.8.: Fasores da tensão e da corrente numa resistência.

Os vetores no lado esquerdo da figura 11.8 são os fasores no instante $t = 0$, mas como os dois vetores rodam com a mesma velocidade angular, estarão sempre na mesma direção e sentido em qualquer instante. Imaginando esses dois vetores a rodar no sentido anti-horário, com a mesma velocidade angular, as suas projeções no eixo real (tensão e corrente em função do tempo) são as funções apresentadas no lado direito da figura. Diz-se que a tensão e a corrente estão **em fase**: os dois vetores têm sempre a mesma direção e sentido, de forma que ambas as funções atingem os respetivos valores máximo e mínimo em simultâneo.

11.5.2. Condensadores

Nos condensadores, a impedância generalizada é $1/(C\,s)$ e a impedância complexa é então:

$$Z(\mathrm{i}\omega) = \frac{1}{\mathrm{i}\omega\,C} = \frac{1}{\omega\,C}\angle-\frac{\pi}{2} \tag{11.25}$$

Em particular, a reatância de um condensador é negativa e inversamente proporcional à frequência angular,

$$\boxed{X_C = -\frac{1}{\omega\,C}} \tag{11.26}$$

sendo a sua resistência nula.

Aplicando as equações 11.23 obtém-se

$$\mathbf{I} = V_{\text{máx}}\,\omega\,C\angle(\varphi_V + \pi/2)$$

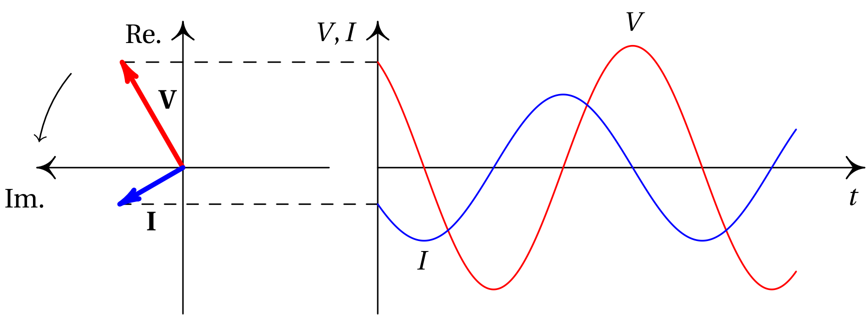


Figura 11.9.: Fasores da tensão e da corrente num condensador.

Ou seja, a fase da corrente é $\pi/2$ maior que a da tensão. Na representação vetorial dos fasores, no lado esquerdo da figura 11.9, a corrente é perpendicular à tensão e está adiantada em relação ao sentido de rotação anti-horário. Os vetores estão nas posições em que estão os fasores em $t = 0$; enquanto esses vetores rodam no sentido anti-horário, com velocidade angular constante, a projeção no eixo das abcissas produz as funções representadas no lado direito da figura. Como os dois vetores rodam com a mesma velocidade angular, são perpendiculares em qualquer instante. O desfasamento de $\pi/2$ entre a corrente e a tensão também observa-se nos gráficos do lado direito, pelo facto de $I(t)$ ter valor máximo ou mínimo cada vez que $V(t)$ é nula. E o facto de ser a corrente a que está adiantada em relação à tensão descobre-se observando dois máximos (ou mínimos), das duas funções $I(t)$ e $V(t)$, que estejam próximos entre si. O máximo de $I(t)$ ocorre sempre antes do que o máximo de $V(t)$.

11.5.3. Indutores

Nos indutores a impedância generalizada é $L\,s$, sendo a impedância complexa:

$$Z(\mathrm{i}\omega) = \mathrm{i}\,\omega\, L = \omega\, L \angle \pi/2 \tag{11.27}$$

A reatância de um indutor é positiva e diretamente proporcional à frequência angular:

$$\boxed{X_L = \omega\, L} \tag{11.28}$$

sendo a sua resistência nula.

Pelas equações 11.23 conclui-se que a fase da corrente é $\pi/2$ menor que a da tensão. Na representação gráfica dos fasores (lado esquerdo da figura 11.10) o fasor da corrente é perpendicular ao da tensão e está atrasado, em relação ao sentido da rotação. Como os dois vetores rodam com a mesma velocidade angular, em qualquer outro instante também são perpendiculares.

As projeções no eixo real quando os vetores rodam no sentido anti-horário conduzem às duas funções representadas no lado direito da figura. O atraso em $\pi/2$ do fasor da corrente é visível no gráfico das funções, porque olhando para os valores máximos dessas duas funções, que estão mais próximos entre si, primeiro ocorre o máximo de $V(t)$ e a seguir o de $I(t)$.

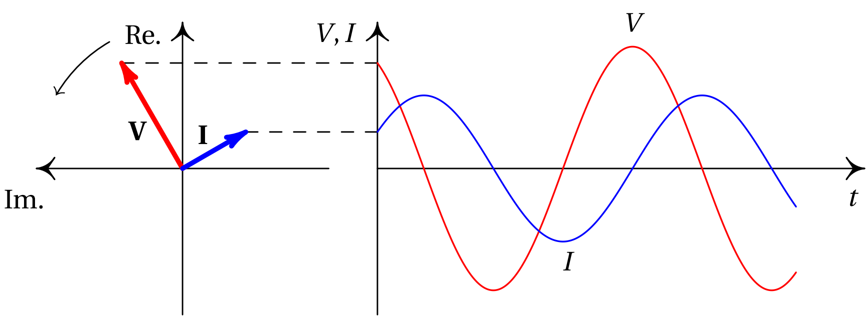
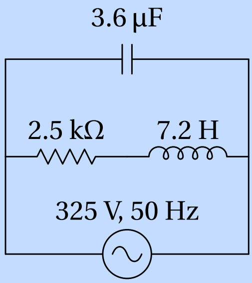


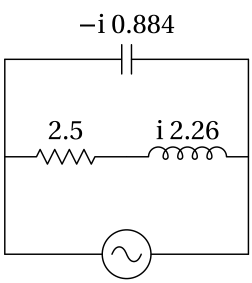
Figura 11.10.: Fasores da tensão e da corrente num indutor.

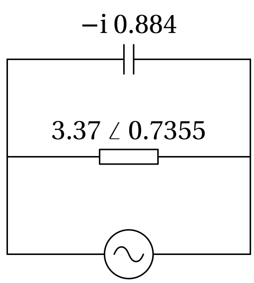
Exemplo 11.2
Cacule a tensão e corrente instantâneas em todos os elementos do circuito representado no diagrama.



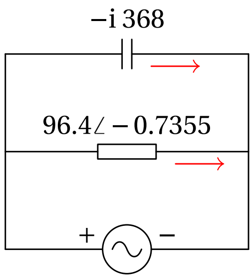
Resolução. Este circuito é o mesmo que já foi analisado no exemplo 10.3 do capítulo anterior. Usando o mesmo sistema de unidades tem-se: impedância em kΩ, capacidade em µF, indutância em H, tempo em ms, frequência em kHz, tensão em V e corrente em mA. A frequência angular da fonte é: $\omega = 2 \times \pi \times 50$ Hz, mas como deve ser convertida para kHz, tem o valor $\pi/10$.

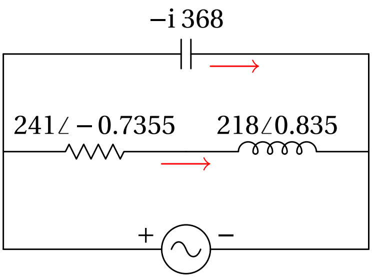
A impedância da resistência é 2.5, a do condensador $10/(3.6\,\pi)\angle-\pi/2 = 0.884\angle-\pi/2$ e a do indutor é $7.2\,\pi/10\angle\pi/2 = 2.26\angle\pi/2$. Como a resistência está em série com o indutor, podem ser substituídos por um único elemento com impedância igual à soma das impedâncias:





Como os dois elementos no circuito simplificado estão em paralelo, o fasor da tensão é o mesmo para os dois e igual ao fasor da fonte: $325\angle 0$. Dividindo esse fasor pelas impedâncias dos dois elementos calculam-se as correntes correspondentes. Em seguida, multiplicando o fasor da segunda corrente pelas impedâncias da resistência e do indutor, calculam-se os fasores das tensões:





A partir dos fasores podem-se exprimir as tensões e correntes instantâneas:

$$
\begin{array}{lll}
C: & V = 325\cos(0.1\,\pi\, t) & I = 368\cos(0.1\,\pi\, t + \pi/2) \\
R: & V = 241\cos(0.1\,\pi\, t - 0.735) & I = 96.4\cos(0.1\,\pi\, t - 0.735) \\
L: & V = 218\cos(0.1\,\pi\, t + 0.835) & I = 96.4\cos(0.1\,\pi\, t - 0.735)
\end{array}
$$

Interessa mostrar a resolução deste exemplo usando o Maxima. As impedâncias do condensador, resistência e indutor representam-se por z_1, z_2 e z_3, respetivamente e z_4 representa a impedância da associação em série da resistência com o indutor em série. Para obter maior precisão numérica, escrevem-se os valores dados no enunciado na forma de números racionais:

```
(%i1) s: %i*%pi/10$

(%i2) z1: 10/36/s$

(%i3) z2: 5/2$

(%i4) z3: 72*s/10$

(%i5) z4: z2 + z3$
```

Os fasores da tensão e a corrente no condensador são:

```
(%i6) V1: 325$

(%i7) I1: V1/z1$
```

A corrente máxima e a fase são o módulo e a fase do número complexo `I1`, que no Maxima são obtidos com as funções cabs e carg (`cabs` quer dizer *complex absolute value* e `carg` *complex argument*. O módulo e a fase de um número complexo também costumam chamarem-se valor absoluto e argumento.)

```
(%i8) float(cabs(I1));
(%o8)       367.6
(%i9) carg(I1);
(%o9)       π/2
```

Os fasores da corrente e as tensões na resistência e no indutor são:

```
(%i10) I4: V1/z4$
(%i11) float(cabs(I4));
(%o11)       96.4
(%i12) float(carg(I4));
(%o12)       −0.7354
(%i13) V2: I4*z2$
(%i14) float(cabs(V2));
(%o14)       241.0
(%i15) float(carg(V2));
(%o15)       −0.7354
(%i16) V3: I4*z3$
(%i17) float(cabs(V3));
(%o17)       218.0
(%i18) float(carg(V3));
(%o18)       0.8353
```

11.6. Potência nos circuitos de corrente alternada

Em qualquer ponto de um circuito de corrente alternada, a corrente é uma função sinusoidal; em cada período de oscilação, a mudança de sinal da função sinusoidal indica que o sentido da corrente muda. O integral da função, em cada período é nulo, o quer dizer que a carga total transferida é nula; durante metade do período há transporte de carga num sentido e no meio período seguinte a mesma carga é transportada no sentido oposto.

Não há transferência efetiva de carga nos circuitos de corrente alternada. As cargas de condução simplesmente oscilam à volta de uma posição de equilíbrio. Apesar de não haver transferência efetiva de cargas, há dissipação efetiva de energia elétrica, pois a oscilação das cargas é contrariada pela resistência dos condutores e há efeito Joule, independentemente do sentido da corrente.

Em qualquer dispositivo passivo num circuito com fonte de tensão alternada, a tensão e a corrente são funções sinusoidais com a mesma frequência da fonte, após uma possível resposta transitória inicial:

$$V(t) = V_{\text{máx}} \cos(\omega\, t + \varphi_V) \qquad I(t) = I_{\text{máx}} \cos(\omega\, t + \varphi_I) \tag{11.29}$$

A **potência instantânea**, $P(t)$, é a potência no dispositivo em qualquer instante t

$$P(t) = V(t)\, I(t) = V_{\text{máx}}\, I_{\text{máx}} \cos(\omega\, t + \varphi_V) \cos(\omega\, t + \varphi_I) \tag{11.30}$$

Usando uma relação trigonométrica para o produto de dois cossenos e o facto de ser $(\varphi_V - \varphi_I) = \varphi_Z$ (equação 11.23), conclui-se que a expressão anterior é equivalente a:

$$P(t) = \frac{1}{2}\, V_{\text{máx}}\, I_{\text{máx}} \left[\cos(2\,\omega\, t + \varphi_V + \varphi_I) + \cos(\varphi_Z)\right] \tag{11.31}$$

Note-se que o primeiro cosseno dentro dos parêntesis retos em 11.31 é uma função sinusoidal, com frequência igual ao dobro da frequência da fonte, enquanto o segundo cosseno é uma função constante. Ou seja, o produto das duas funções sinusoidais (V e I) com a mesma frequência não conduz outra função sinusoidal com a mesma frequência, mas a uma função sinusoidal com o dobro da frequência, deslocada no eixo das ordenadas.

A potência instantânea 11.31 pode ser positiva ou negativa em alguns intervalos e nula em alguns instantes, dependendo do valor da constante $\cos(\varphi_Z)$, chamada **fator de potência**. Como φ_Z está entre $-\pi/2$ e $\pi/2$, o fator de potência situa-se entre 0 e 1.

Se a reatância for nula (dispositivo resistivo) e a fase da impedância (φ_Z) é nulo, o fator de potência é igual a 1 e a potência instantânea é sempre positiva, indicando que o dispositivo está sempre a dissipar energia. Já se a resistência for nula (dispositivo reativo), a fase da impedância é $\pm\pi/2$, o fator de potência é nulo e os intervalos em que a potência instantânea é positiva (dissipação de energia) são do mesmo comprimento que os intervalos em que é negativa (fornecimento de energia); a potência média é nula.

No caso geral, em que o fator de potência é maior que 0 e menor que 1, os intervalos em que há dissipação de energia são mais compridos do que os intervalos em que há fornecimento de energia e, em média, o circuito dissipa energia.

O valor médio da potência, $\bar{P}$, calcula-se integrando a função 11.31 durante um período e dividindo pelo valor do período. O integral do primeiro termo é nulo, durante um período, enquanto que o valor médio do termo constante é igual a si próprio. Consequentemente, a **potência média** é:

$$\boxed{\bar{P} = \frac{1}{2}\, V_{\text{máx}}\, I_{\text{máx}} \cos\varphi_Z} \tag{11.32}$$

e tem valor positivo ou nulo, indicando que, em média o dispositivo passivo não pode fornecer energia. É também habitual definir a **tensão eficaz** e a **corrente eficaz**:

$$\boxed{V_{\text{ef}} = \frac{V_{\text{máx}}}{\sqrt{2}} \qquad I_{\text{ef}} = \frac{I_{\text{máx}}}{\sqrt{2}}} \tag{11.33}$$

e como tal, a potência média é igual ao produto da tensão e corrente eficazes e o fator de potência:

$$\bar{P} = V_{\text{ef}}\, I_{\text{ef}} \cos\varphi_z$$

A tensão máxima de 325 V usada na União Europeia corresponde a uma tensão eficaz de 230 V. No continente americano usa-se tensão máxima de 170 V, a 60 Hz, que corresponde a uma tensão eficaz de 120 V.

11.7. Filtros de frequência

A equação 10.36, obtida no capítulo anterior, é válida para qualquer sinal de entrada. Para um sinal de entrada V_e sinusoidal, usando a expressão para a transformada de Laplace das funções sinusoidais (apêndice C) obtém-se,

$$\tilde{V}(s) = \frac{\mathbf{V}_e\, H(s)}{s - \mathrm{i}\omega} \tag{11.34}$$

Se $H(\mathrm{i}\omega)$ tiver um valor finito, a expansão de $\tilde{V}$ em frações parciais conduz a

$$\tilde{V}(s) = \frac{\mathbf{V}}{s - \mathrm{i}\omega} + \tilde{V}_{\text{trans}}(s) \tag{11.35}$$

onde **V** é um número complexo, que corresponde ao fasor da saída (após a resposta transitória), e o termo $\tilde{V}_{\text{trans}}$ é a transformada da tensão de resposta transitória, que não tem o fator $(s - \mathrm{i}\omega)$ no denominador.

Substituindo essa expansão na equação 11.34, obtém-se:

$$\frac{\mathbf{V}}{s - \mathrm{i}\omega} + \tilde{V}_{\text{trans}}(s) = \frac{\mathbf{V}_e\, H(s)}{s - \mathrm{i}\omega} \tag{11.36}$$

Multiplicando ambos os membros da equação por $(s - \mathrm{i}\omega)$ e substituindo s por $\mathrm{i}\omega$ obtém-se:

$$\boxed{\mathbf{V} = H(\mathrm{i}\omega)\,\mathbf{V}_e} \tag{11.37}$$

onde a função $H(\mathrm{i}\omega)$ é uma função complexa, de variável real ω, chamada função de **resposta em frequência**. Como tal, se a tensão de entrada for a tensão alternada $V_{\text{máx}} \cos(\omega\, t + \varphi)$, a tensão de saída será

$$V = V_{\text{máx}}\, |H(\mathrm{i}\omega)| \cos\left(\omega\, t + \varphi + \varphi_H\right) \tag{11.38}$$

onde $|H(\mathrm{i}\omega)|$ e φ_H são o módulo e a fase da função complexa $H(\mathrm{i}\omega)$.

Por exemplo, no caso do filtro passa-alto, mostrou-se no capítulo anterior que a função de transferência é (equação 10.38):

$$H(s) = \frac{R\,C\,s}{R\,C\,s + 1} \tag{11.39}$$

A função de resposta em frequência é então:

$$H(\mathrm{i}\omega) = \frac{\mathrm{i}\,R\,C\,\omega}{1 + \mathrm{i}\,R\,C\,\omega} \tag{11.40}$$

e o seu módulo e fase são:

$$|H(\mathrm{i}\omega)| = \frac{R\,C\,\omega}{\sqrt{1 + (R\,C\,\omega)^2}} \qquad \varphi_H = \frac{\pi}{2} - \arctan(R\,C\,\omega) \tag{11.41}$$

A figura 11.11 mostra o módulo da função de resposta em frequência num filtro passa-alto com frequência angular de corte, $1/(R\,C)$, igual a 0.5 e a figura 11.12 mostra a fase dessa função. Note-se que quando a frequência

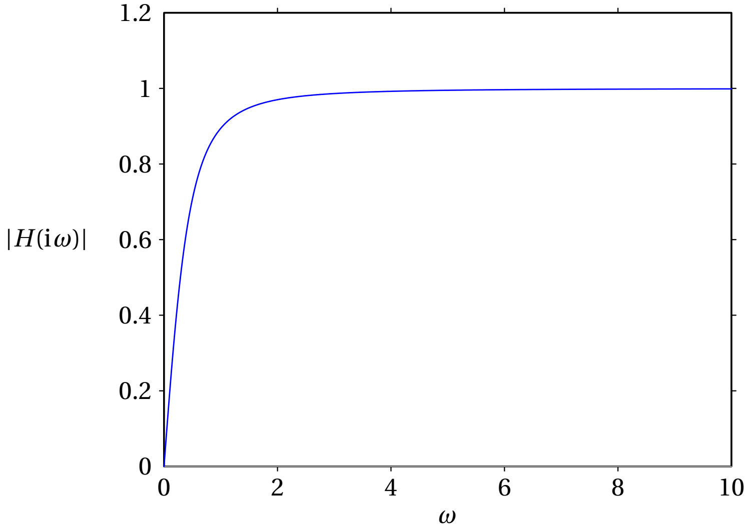


Figura 11.11.: Módulo da função de resposta em frequência num filtro passa-alto com frequência angular de corte $\omega_c = 0.5$ unidades.

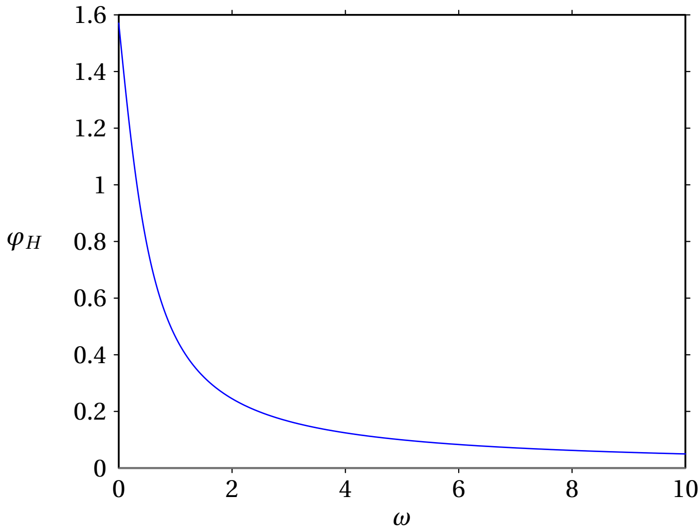


Figura 11.12.: Fase da função de resposta em frequência num filtro passa-alto com frequência angular de corte $\omega_c = 0.5$ unidades.

angular for igual à frequência de corte $\omega_c = 1/(RC)$, $H(\mathrm{i}\omega)$ terá módulo $1/\sqrt{2} = 0.707$ e fase igual a $\pi/4$.

Vários filtros podem ser combinados de forma sequencial, e a função de resposta é o produto das funções de todos os filtros na sequência. Por exemplo, o filtro **passa-banda** da figura 11.13 é a combinação de um filtro passa-alto, com frequência angular de corte $\omega_1 = 1/(R_1 C_1)$ e um filtro passa-baixo, com frequência angular de corte $\omega_2 = 1/(R_2 C_2)$.

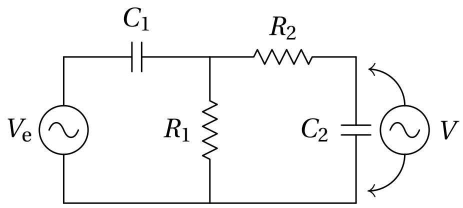


Figura 11.13.: Filtro passa-banda.,

A função de resposta em frequência desse filtro é a seguinte (problema 11):

$$H(\mathrm{i}\omega) = \frac{\mathrm{i}\,\omega_2\,\omega}{\omega_1\,\omega_2 + -\omega^2 + \mathrm{i}\left(\omega_1 + \omega_2 + \omega 1/g\right)\omega} \tag{11.42}$$

onde $g = R_2/R_1$, chamada **ganho**, é uma constante sem unidades. O módulo dessa função, $|H(\mathrm{i}\omega)|$, é nulo em $\omega = 0$ e $\omega \to \infty$, e tem um valor máximo $\omega_2/(\omega_1 + \omega_2 + \omega 1/g)$, quando a frequência angular w for igual à média geométrica das duas frequências de corte: $w = \sqrt{\omega_1\,\omega_2}$.

Um filtro ideal deveria ter uma função de resposta nula, para as frequências que se pretende eliminar, e 1 nas outras frequências. Com circuitos mais complicados conseguem-se obter filtros com comportamento mais próximo do ideal. Outro fator a ter em conta é a resposta transitória, que tem sido ignorada por ser nula após algum tempo, mas num filtro de boa qualidade é necessário garantir que a resposta transitória desaparece o mais rapidamente possível.

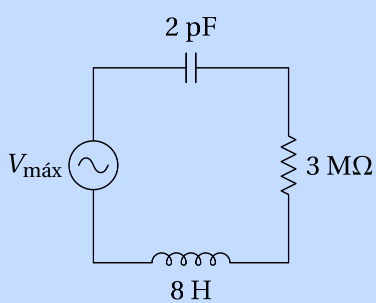
11.8. Ressonância

Quando um circuito com condensadores e indutores é ligado a diferentes fontes com a mesma tensão máxima $V_{\text{máx}}$, mas com diferentes frequências, a potência absorvida pelo circuito varia em função da frequência. Normalmente, existe uma **frequência de ressonância** tal que a potência dissipada pelo circuito é máxima. Se a frequência da fonte é igual à frequência de ressonância do circuito, diz-se que o circuito está em **ressonância** com a fonte.

No caso particular do circuito RLC, com uma resistência, um indutor e um condensador em série, a reatância equivalente X é função contínua da frequência f. Quando f se aproxima de infinito ou de zero, o valor absoluto da reatância aproxima-se de infinito. Como tal, a corrente nos 3 dispositivos é nula. A frequência de ressonância é a frequência que faz com que a reatância seja nula e o módulo da impedância seja mínimo. Isso implica que o ângulo da impedância (φ) será nulo e o fator de potência ($\cos\varphi$) igual a 1. A corrente máxima e a potência média em função de f são ambas máximas e a tensão e a corrente estão em fase.

A frequência (ou frequências) de ressonância é um valor caraterístico de cada circuito. Nos circuitos em que os indutores e condensadores não estão em série, a frequência de ressonância pode surgir quando a reatância não é nula, com fator de potência diferente de 1, ou seja corrente desfasada da voltagem.

Exemplo 11.3
Calcule a frequência de ressonância do circuito e a potência média máxima que pode fornecer a este circuito uma fonte com tensão máxima $V_{\text{máx}}$.



Resolução. Com a resistência em MΩ e a capacidade em pF, convém usar µs para a unidade de tempo e, portanto, MHz para a frequência e H para a indutância.

A impedância total do circuito é a soma das 3 impedâncias:

$$Z = 3 + \mathrm{i}\,8\,\omega - \frac{\mathrm{i}}{2\,\omega} = 3 + \mathrm{i}\left(8\,\omega - \frac{1}{2\,\omega}\right)$$

Observe-se que a parte real da impedância equivalente não depende da frequência, porque o condensador e o indutor estão em série e, como tal, o valor mínimo do módulo da impedância obtém-se quando a parte imaginária seja igual a zero:

$$8\,\omega - \frac{1}{2\,\omega} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \omega = \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad f = \frac{\omega}{2\,\pi} = 0.0398$$

No sistema de unidades usado, a frequência de ressonância é 0.0398 MHz, igual a 39.8 kHz.

Se a fonte tivesse essa frequência, a impedância equivalente seria real, Z = 3 MΩ, e a corrente máxima teria o valor $I_{\text{máx}} = V_{\text{máx}}/3$ (μA, se $V_{\text{máx}}$ estiver em volts). A potência média máxima é $\bar{P} = V_{\text{máx}}\,I_{\text{máx}}/2 = V_{\text{máx}}^2/6$ (μW, se $V_{\text{máx}}$ estiver em volts).

No circuito do exemplo anterior, a tensão de entrada carrega e descarrega o condensador. Inicialmente, a carga no condensador oscila com a frequência de oscilação da tensão na fonte; mas quando a carga no condensador é elevada, a diferença de potencial do condensador pode contrariar a tensão da fonte, impedindo a entrada de mais carga.

A situação é semelhante a uma massa pendurada de uma mola elástica, na qual atua outra força externa que tenta manter a massa oscilando para cima e para baixo. Se a força externa não oscila com a uma frequência igual à frequência própria de oscilação da mola elástica, há momentos em que a força externa está a tentar fazer subir a massa, enquanto a mola elástica faz força no sentido oposto.

No caso do circuito, se a fonte não existisse mas o condensador tivesse uma carga inicial, começaria a descarregar, produzindo corrente. No momento em que o condensador descarrega completamente, o indutor faz com que a corrente persista por alguns instantes, recarregando o condensador com cargas de sinais opostos à carga inicial. O ciclo repete-se, com uma frequência própria do circuito. No entanto, a resistência faz com que a carga do condensador seja menor em cada ciclo, até desaparecer (equilíbrio estável). Existe ressonância quando a fonte oscila com a frequência própria do circuito.

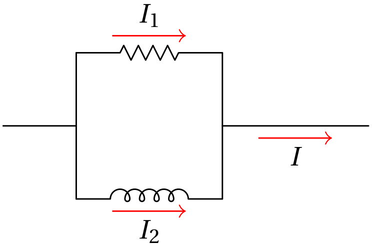
Se a resistência fosse nula, quando a frequência da fonte fosse a frequência de ressonância, Z seria nula e aparentemente $I_{\text{máx}} = V_{\text{máx}}/Z$ seria infinita. No entanto, a corrente não aumenta instantaneamente até esse valor, mas sim gradualmente, com as oscilações da carga no condensador. Quando essa carga máxima se torna muito elevada, há rutura do dielétrico no condensador ou a corrente elevada queima o indutor.

Perguntas

1. As expressões das correntes no segmento de circuito representado no diagrama são

$$I_1(t) = \cos(\omega\, t + 2\pi/3) \qquad I_2(t) = \sqrt{3}\cos(\omega\, t + \pi/6)$$

Encontre a expressão para $I(t)$.



A. $3\cos(\omega\, t - \pi/2)$

B. $2\cos(\omega\, t - \pi/3)$

C. $3\cos(\omega\, t + \pi/2)$

D. $\sqrt{3}\cos(\omega\, t + \pi/2)$

E. $2\cos(\omega\, t + \pi/3)$

2. Um condensador de 2.73 μF e uma resistência de 1166 Ω estão ligados em série a uma fonte de tensão alternada com frequência de 50 Hz e tensão máxima de 325 V. Calcule a corrente eficaz na resistência.

A. 247 mA
B. 139 mA
C. 99 mA
D. 212 mA
E. 170 mA

3. Um condensador de 2.73 μF e uma resistência de 1166 Ω estão ligados em série a uma fonte de tensão alternada de 50 Hz. Pode-se concluir então que a tensão da fonte está:

A. Adiantada 90° em relação à corrente.
B. Adiantada 45° em relação à corrente.
C. Atrasada 90° em relação à corrente.
D. Atrasada 45° em relação à corrente.
E. Em fase com a corrente.

4. Qual das afirmações seguintes é verdadeira, em relação a uma bobina de 2 mH e um condensador de 5 pF?

A. O valor absoluto da reatância da bobina é menor.
B. O valor absoluto da reatância do condensador é menor.
C. Se a corrente for contínua, o valor absoluto da reatância da bobina é menor.
D. Se a corrente for contínua, o valor absoluto da reatância do condensador é menor.
E. Se a corrente for contínua, a reatância dos dois dispositivos é nula.

5. Num circuito RLC de corrente alternada, em série, quando a reatância equivalente for nula, qual das seguintes afirmações é verdadeira:

A. A impedância é nula.
B. O fator de potência é nulo.
C. O ângulo de desfasamento é nulo.
D. A corrente é nula.
E. A tensão é nula.

Problemas

1. Sabendo que o fasor representado na figura 11.4 é $\mathbf{F} = 5.2\angle 30°$, determine a expressão para a função sinusoidal, $F(t)$, representada por esse fasor.

2. A resistência de uma bobina é 150 Ω e a sua indutância é 1.4 H. A bobina é ligada à rede elétrica com tensão máxima 325 V e frequência de 50 Hz. Encontre a expressão para a corrente na bobina em função do tempo t.

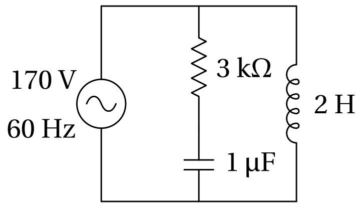
3. Uma bobina, com indutância de 36 mH e resistência de 40 Ω, liga-se em paralelo com um condensador de 32 nF e com uma fonte de tensão alternada $V(t) = 345\cos(150\pi\, t)$ (em volts, e o tempo t em segundos). Calcule: (*a*) A corrente máxima na bobina. (*b*) A corrente eficaz no condensador. (*c*) As potências médias dissipadas na bobina e no condensador.

4. Demonstre que a transformada inversa da equação 11.3 conduz à corrente alternada indicada na equação 11.5.

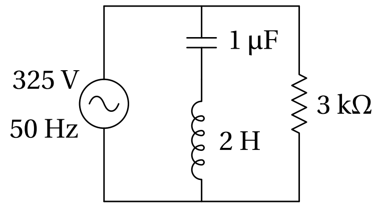
5. No 9 do capítulo 9, determine a frequência do circuito e os valores máximos da corrente e da carga.

6. Nos dois circuitos representados na figura, calcule a corrente e a tensão em todos os elementos do circuito.

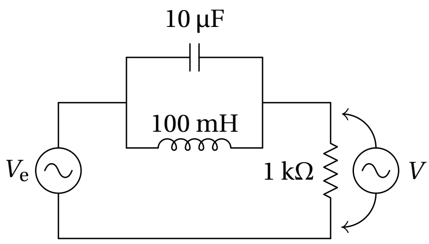
(*a*)



(*b*)

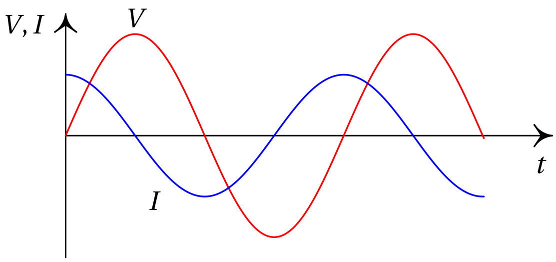


7. A figura mostra um filtro **rejeita-banda** que atenua as frequências angulares próximas de 1 kHz. (*a*) Determine a função de resposta em frequência, $H(\mathrm{i}\omega)$, do circuito. (*b*) Mostre que para $\omega = 1$ kHz, $H(\mathrm{i}\omega)$ é igual a zero. (*c*) Calcule o módulo de $H(\mathrm{i}\omega)$ e trace o seu gráfico para ω entre 0 e 2 kHz.

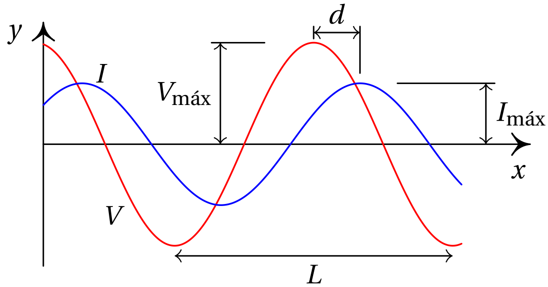


8. Num segmento de um circuito de corrente alternada a tensão em função do tempo é dada pela expressão $24\cos(\pi\, t/10 + 1.5)$ (em volt, com t em milissegundos) e a corrente é $8\cos(\pi\, t/10 + 2.0)$ (µA, com t em ms). (*a*) Calcule a resistência e reatância desse segmento. (*b*) O segmento do circuito avariou e pretende-se substituí-lo com resistências, condensadores ou indutores, mas o orçamento só permite comprar dois dispositivos. Quais dispositivos deviam ser comprados, com que valores, e como deviam ser ligados no circuito?

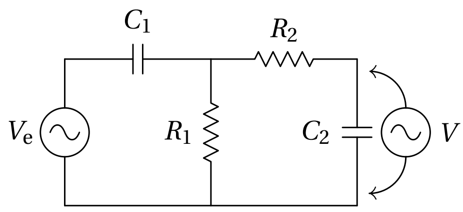
9. A figura mostra a tensão e a corrente num condensador. A corrente é produzida pela tensão: se não houver tensão elétrica, não há corrente. Como se explica então que no instante $t = 0$ a corrente seja diferente de zero, sendo a tensão nula?



10. A figura mostra o ecrã de um osciloscópio onde aparecem a tensão e a corrente num elemento de um circuito. As distâncias L e d foram medidas diretamente no ecrã, obtendo-se os valores $L = 6$ cm, $d = 1$ cm. O osciloscópio também permite determinar que a tensão máxima é $V_{\text{máx}} = 36$ V e a corrente máxima é $I_{\text{máx}} = 12$ mA. Com esses dados, calcule a parte real e a parte imaginária da impedância do elemento do circuito.



11. Considere o filtro passa-banda:



(a) Demonstre que a função de resposta em frequência é a expressão na equação 11.42, onde $g = R_2/R_1$, $\omega_1 = 1/(R_1\,C_1)$ e $\omega_2 = 1/(R_2\,C_2)$ (sugestão: encontre primeiro a função de transferência $H(s)$, usando as expressões $z_1 = R_1\,\omega_1/s$ e $z_2 = R_2\,\omega_2/s$ para as impedâncias dos dois condensadores). (b) Determine o valor máximo de $|H(\mathrm{i}\omega)|$ e a frequência angular ω em que essa função é máxima. (c) Trace o gráfico de $|H(\mathrm{i}\omega)|$, com ω, entre 0 e 3 kHz, no caso em que $C_1 = 6$ μF, $C_2 = 1$ μF, $R_1 = 6$ kΩ e $R_2 = 4$ kΩ

Respostas

Perguntas: 1. E. **2.** B. **3.** D. **4.** C. **5.** C.

Problemas

1. $F(t) = 5.2\cos\left(\dfrac{\pi\, t}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right)$

2. $I(t) = 0.669\sin(314.16\, t - 1.2421)$ A.

3. (*a*) 7.94 A. (*b*) 3.68 mA (*c*) 1.261 kW na bobina e 0 no condensador.

4. A expressão para a transformada da corrente é $\tilde{I} = \dfrac{I_0\, s}{s^2+\omega^2} = \mathrm{Re}\left(\dfrac{I_0}{s - \mathrm{i}\,\omega}\right)$, onde $\omega = \sqrt{1/(LC)}$ e a transformada inversa é a expressão 11.5.

5. $f = 1.779$ kHz, $I_{\text{máx}} = 20$ mA, $Q_{\text{máx}} = 1.789$ µC.

6. (*a*) Tensões em V, correntes em mA, tempo em ms.

Condensador: $V = 113\cos(0.378\, t - 0.847)$ $I = 2.5\cos(0.378\, t + 0.724)$

Resistência: $V = 127\cos(0.378\, t + 0.724)$ $I = 42.5\cos(0.378\, t + 0.724)$

Indutor: $V = 170\cos(0.378\, t)$ $I = 225\cos(0.378\, t - \pi/2)$

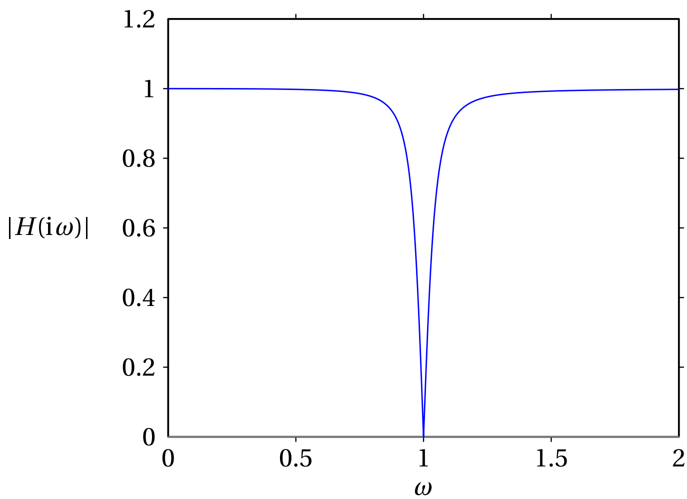
(*b*) Tensões em V, correntes em mA, tempo em ms.

Condensador: $V = 405\cos(0.314\, t)$ $I = 127\cos(0.314\, t + \pi/2)$

Resistência: $V = 325\cos(0.314\, t)$ $I = 108\cos(0.314\, t)$

Indutor: $V = 79.9\cos(0.314\, t + \pi)$ $I = 127\cos(0.314\, t + \pi/2)$

7. (*a*) $H(\mathrm{i}\omega) = \dfrac{10\,\omega^2 - 10}{10\,\omega^2 - 10 - \mathrm{i}\,\omega}$ (*c*) $|H(\mathrm{i}\omega)| = \dfrac{\left|\omega^2 - 1\right|}{\sqrt{\omega^4 - 1.99\,\omega^2 + 1}}$



8. (*a*) resistência 2.63 MΩ e reatância −1.44 MΩ. (*b*) Uma resistência de 2.63 MΩ e um condensador de 2.21 nF, ligados em série.

9. A tensão e corrente apresentadas no gráfico apenas poderão ter essas formas sinusoidais algum tempo após ter sido ligada a fonte, quando a resposta transitória já tiver desaparecido. Se a fonte de tensão fosse ligada apenas no instante $t = 0$, a corrente não poderia ter nesse instante um valor diferente de zero; em vez da função sinusoidal no gráfico, teríamos uma função que parte de zero e se aproxima gradualmente da função sinusoidal (resposta transitória mais resposta sinusoidal).

10. $z = (1.5 + \mathrm{i}\,2.598)$ kΩ

11. (*b*) $|H(\mathrm{i}\omega)|_{\text{máx}} = \omega_2/(\omega_1 + \omega_2 + \omega_1/g)$, $w_{\text{máx}} = \sqrt{\omega_1\,\omega_2}$.
(*c*) O gráfico é o seguinte: