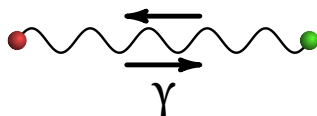


## 6. Fluxo elétrico



A explicação da força entre partículas através da existência de um campo vem desde a época em que foi desenvolvida a teoria da gravitação universal. A dificuldade em aceitar que uma partícula possa afetar outra partícula distante, sem existir nenhum contato entre elas, foi ultrapassada na física clássica com o conceito do campo de força. No caso da força eletrostática, o campo mediador que transmite a força eletrostática foi designado por éter; a luz seria uma onda que se propaga nesse éter. No século XIX foram realizadas inúmeras experiências para detectar a presença do éter, sem qualquer sucesso. No fim do século chegou-se à conclusão de que tal éter não existe. No entanto, o campo elétrico tem existência física, no sentido de que transporta energia e que pode subsistir mesmo após desaparecerem as cargas que o produzem. Na física quântica a interação elétrica é explicada como uma troca de partículas mediadoras da força, que são as mesmas partículas da luz, os fótons; cada carga lança alguns fótons que são absorvidos pela outra carga. Neste capítulo considera-se a teoria clássica que concebe o campo como um fluido invisível que arrasta as cargas elétricas.

## 6.1. Campo elétrico produzido por cargas pontuais

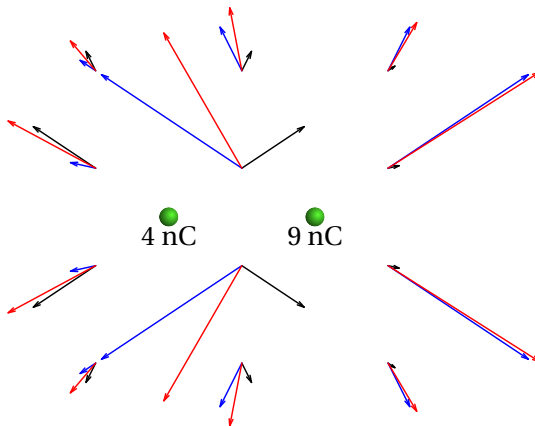
O campo elétrico produzido por uma carga pontual já foi estudado no capítulo 1. A figura 1.6 mostra o campo repulsivo produzido por uma carga positiva.

A equação 1.5 para o módulo do campo produzido por uma carga pontual pode ser escrita de forma vetorial. Se a carga  $q$  estiver na origem das coordenadas, o resultado obtido é:

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^2} \hat{r} \quad (6.1)$$

onde  $r$  é a distância até a origem e  $\hat{r}$  o versor na direção radial, afastando-se da carga. Se a carga for negativa, a equação anterior ainda é válida e o vetor  $\vec{E}$  aponta no sentido oposto de  $\hat{r}$  (campo atrativo). O versor  $\hat{r}$  obtém-se dividindo o vetor de posição  $\vec{r}$  pelo seu módulo,  $r$ . Se a carga não estiver na origem mas numa posição  $\vec{r}_1$ , a equação 6.1 pode ser generalizada, obtendo-se:

$$\vec{E} = \frac{kq(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \quad (6.2)$$



**Figura 6.1.:** Campos produzidos por duas cargas de 4 nC e 9 nC em alguns pontos, e o campo resultante nesses pontos.

O campo produzido por um sistema de cargas pontuais obtém-se somando vetorialmente os campos produzidos por cada uma das cargas. Por exem-

plo, a figura 6.1 mostra os campos produzidos em alguns pontos por cada uma de duas cargas pontuais de 4 nC e 9 nC, e o campo resultante nesses pontos, igual à soma vetorial dos campos das duas cargas.

A equação 6.2 pode ser generalizada para um sistema de  $n$  cargas pontuais. Em coordenadas cartesianas, se as cargas  $q_1, q_2, \dots, q_n$  estiverem nos pontos  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  de um plano  $Oxy$  (a generalização para o espaço  $Oxyz$  deverá ser evidente), o resultado é:

$$E_x = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{k q_i (x - x_i)}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{3/2}} \right] \quad (6.3)$$

$$E_y = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{k q_i (y - y_i)}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{3/2}} \right] \quad (6.4)$$

### Exemplo 6.1

Represente, no plano  $Oxy$ , as linhas do campo elétrico produzido por duas cargas de 4 nC e 9 nC afastadas de 1 cm entre si.

**Resolução.** Primeiro escolhe-se um sistema de unidades; medindo as cargas em nC e as distâncias em cm, o valor da constante de coulomb é:

$$k = 90 \frac{\mu\text{N} \cdot \text{cm}^2}{\text{nC}^2}$$

Como tal, se o valor  $k = 90$  for usado, as unidades do campo serão  $\mu\text{N}/\text{nC}$ . Arbitrando que a carga de 4 nC está na origem e a carga de 9 nC no ponto  $(1, 0)$  e substituindo nas equações 6.3 e 6.4 obtém-se:

$$E_x = \frac{360x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{810(x-1)}{((x-1)^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$E_y = \frac{360y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{810y}{((x-1)^2 + y^2)^{3/2}}$$

Este campo já foi representado em alguns pontos na figura 6.1. Para traçar as linhas de campo elétrico, pode usar-se o programa **plotdf** do *Maxima*.

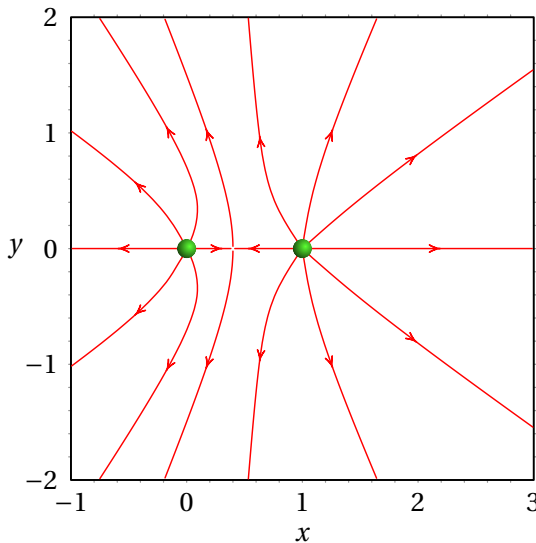
```
(%i1) Ex: 90*4*x/(x^2+y^2)^(3/2) + 90*9*(x-1)/((x-1)^2+y^2)^(3/2);
(%o1) 
$$\frac{360x}{(y^2+x^2)^{3/2}} + \frac{810(x-1)}{(y^2+(x-1)^2)^{3/2}}$$

```

```
(%i2) Ey: 90*4*y/(x^2+y^2)^(3/2) + 90*9*y/((x-1)^2+y^2)^(3/2);
(%o2) 
$$\frac{360y}{(y^2+x^2)^{3/2}} + \frac{810y}{(y^2+(x-1)^2)^{3/2}}$$

(%i3) plotdf ([Ex, Ey], [x, -1, 3], [y, -2, 2], [vectors,"blank"])$
```

A seguir a este último comando é necessário clicar em alguns pontos para obter as linhas de campo que aparecem na figura 6.2. Note-se que a expressão obtida para  $E_y$  é igual a zero em qualquer ponto do eixo dos  $x$  ( $y = 0$ ), com exceção dos pontos onde estão as cargas. Igualando  $y = 0$  e  $E_x = 0$  obtêm-se as coordenadas do ponto onde o campo é nulo,  $x = 0.4$  e  $y = 0$ , que é um ponto de sela como se vê na figura 6.2. Os pontos onde estão as duas cargas positivas são nós repulsivos.



**Figura 6.2.:** Linhas de campo elétrico de duas cargas pontuais de 4 nC e 9 nC colocadas na origem, e no ponto (1, 0).

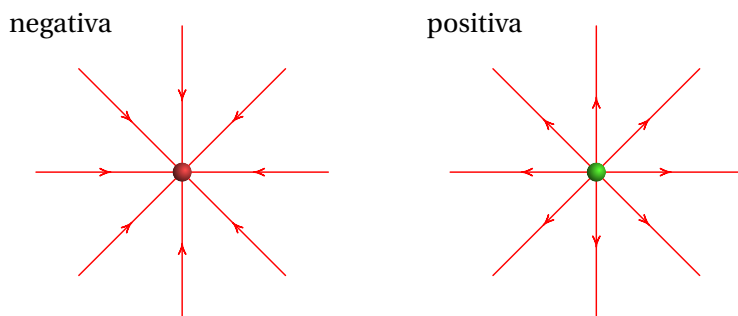
## 6.2. Propriedades das linhas de campo elétrico

O campo elétrico pode ser representado por vetores que indicam o valor do campo em cada ponto do espaço, como foi feito na figura 6.1. O problema é que o campo varia rapidamente com a distância, o que faz com que os

vetores sejam muito grandes em alguns pontos e muito pequenos noutros. A representação por linhas de campo é mais conveniente. As linhas de campo seguem a direção do campo e em cada ponto dessas linhas, o campo é tangente à linha e no sentido indicado pelas setas.

As linhas de campo elétrico têm várias propriedades:

- Na vizinhança de uma carga pontual positiva há linhas que saem em todas as direções e perto de uma carga negativa há linhas que entram em todas as direções (ver figura 6.3).



**Figura 6.3.:** Linhas de campo elétrico de uma carga pontual negativa (esquerda) ou positiva (direita).

- Duas linhas de campo nunca se cruzam; num ponto de cruzamento o campo teria duas direções diferentes, o que não é possível.
- No próximo capítulo demonstra-se que a matriz jacobiana correspondente ao campo elétrico é sempre simétrica. Isso implica que os valores próprios dessa matriz são sempre reais e nunca complexos. Assim, os únicos pontos de equilíbrio que podem existir num campo elétrico são nós e pontos de sela. Um nó pode ser atrativo ou repulsivo; se for atrativo é um ponto onde existe uma carga pontual negativa e se for repulsivo é um ponto onde existe uma carga pontual positiva. Os pontos de sela são pontos onde o campo é nulo, sem que haja carga nesse ponto.

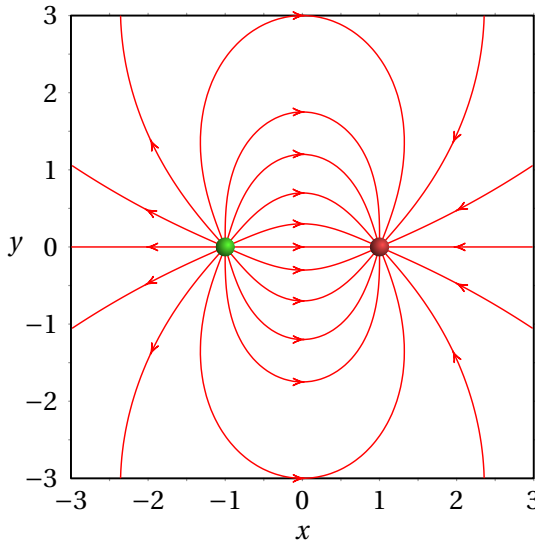
No exemplo apresentado na figura 6.2, existe um ponto de sela em  $(0.4, 0)$ , onde o campo é nulo. Existem duas linhas de campo que terminam nesse ponto de sela e duas linhas de campo que aí começam.

Outro exemplo são as linhas de campo de um **dipolo elétrico**, formado por duas cargas iguais de sinais opostos. Admitindo que as duas cargas estão

localizadas nos pontos  $(-1, 0)$  e  $(1, 0)$ , podem traçar-se as linhas de campo com os seguintes comandos:

```
(%i4) Ex: (x+1)/((x+1)^2+y^2)^(3/2) - (x-1)/((x-1)^2+y^2)^(3/2)$
(%i5) Ey: y/((x+1)^2+y^2)^(3/2) - y/((x-1)^2+y^2)^(3/2)$
(%i6) plotdf ([Ex, Ey], [x, -3, 3], [y, -3, 3], [vectors, "blank"])$
```

O resultado é apresentado na figura 6.4.

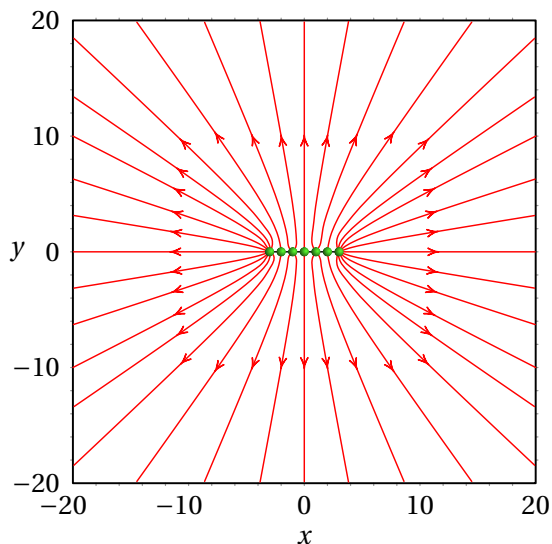


**Figura 6.4.:** Linhas de campo elétrico de um dipolo.

Uma distribuição contínua de cargas pode ser aproximada por uma série de cargas pontuais. Por exemplo, se existirem cargas distribuídas uniformemente no segmento do eixo dos  $x$  entre  $x = -3$  e  $x = 3$ , pode-se imaginar um sistema de cargas pontuais, equidistantes, sobre o segmento entre  $x = -3$  e  $x = 3$ . Os comandos de Maxima para traçar as linhas de campo dessas 7 cargas pontuais são:

```
(%i7) Ex: sum ((x-i)/((x-i)^2+y^2)^(3/2), i, -3, 3)$
(%i8) Ey: sum (y/((x-i)^2+y^2)^(3/2), i, -3, 3)$
(%i9) plotdf ([Ex, Ey], [x,-20,20], [y,-20,20], [vectors, "blank"])$
```

e o gráfico obtido é apresentado na figura 6.5.



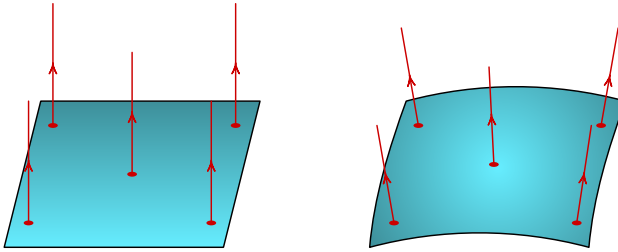
**Figura 6.5.:** Campo elétrico de um sistema de 7 cargas pontuais no eixo dos  $x$ .

### 6.3. Fluxo

O campo elétrico pode ser compreendido melhor usando o conceito de fluxo. Define-se o fluxo elétrico por analogia com um fluido incompressível. No escoamento do fluido, as linhas de campo são tangentes à velocidade do fluido em cada ponto e o fluxo do campo de velocidades é igual ao volume de fluido que passa através da superfície, por unidade de tempo.

Através de uma superfície de área  $A$ , perpendicular à velocidade do fluido e se o módulo da velocidade,  $v$ , for constante em todos os pontos dessa superfície, o volume de fluido que passa através da superfície, por unidade de tempo, é igual a  $vA$ . A figura 6.6 mostra dois exemplos de linhas de campo e em cada caso uma superfícies perpendicular às linhas de campo.

Por analogia com o fluxo do fluido, no caso de uma superfície de área  $A$ , perpendicular às linhas de campo eléctrico, como na figura 6.6, se o módulo  $E$  do campo é constante nessa superfície, define-se o **fluxo eléctrico** através da superfície igual ao produto do módulo do campo vezes a área

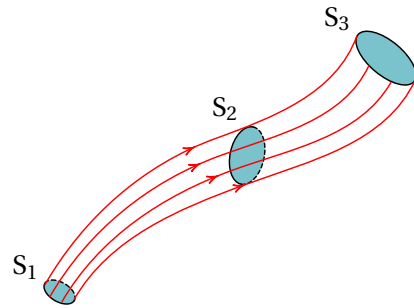


**Figura 6.6.:** Superfícies perpendiculares às linhas de campo.

da superfície:

$$\Phi = E A \quad (6.5)$$

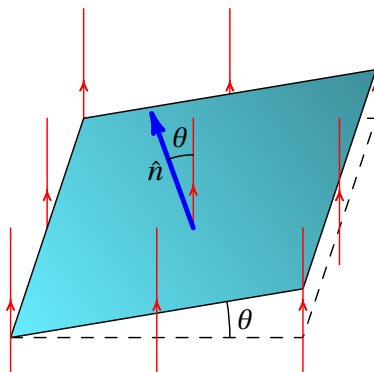
O volume delimitado pelas linhas de campo que passam por uma curva fechada, por exemplo, a fronteira da superfície  $S_1$  na figura 6.7, chama-se **tubo de fluxo**. Usando a analogia com o fluido incompressível, se não existem dentro do tubo pontos onde entra ou sai fluido, então o fluxo é o mesmo em todas as seções transversais do tubo, independentemente da curvatura ou inclinação dessas seções. Por exemplo, no tubo de fluxo da figura 6.7, o volume de fluido que passa pelas três superfícies  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$ , por unidade de tempo, deve ser o mesmo e, como tal, o fluxo através dessas superfícies, ou de qualquer outra seção do tubo, é igual.



**Figura 6.7.:** Tubo de fluxo.

Essa propriedade dos tubos de fluxo pode usar-se para calcular o fluxo de um campo elétrico uniforme,  $\vec{E}$ , através de uma superfície plana de área  $A$ , que não seja perpendicular às linhas de campo. O ângulo de inclinação das linhas de campo em relação ao versor normal à superfície,  $\hat{n}$ , é  $\theta$  na figura 6.8. O fluxo através da superfície inclinada é igual ao fluxo através da projeção dessa superfície no plano perpendicular às linhas de campo, ou seja através da superfície a tracejado na figura 6.8, que faz um ângulo  $\theta$  com a superfície inclinada. Os dois fluxos são iguais porque a superfície inclinada e a superfície a tracejado fazem parte do mesmo tubo de fluxo, formado pelas linhas de campo que as atravessam.



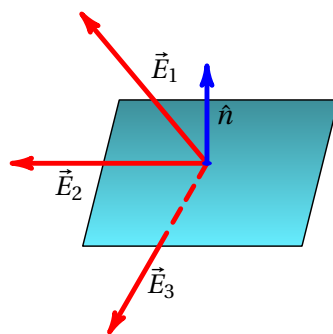


**Figura 6.8.:** Superfície inclinada em relação às linhas de campo.

A área da superfície a tracejado é  $A \cos \theta$ , onde  $\theta$  é ângulo entre o campo e a perpendicular ao plano (figura 6.8). Como essa superfície a tracejado sim é perpendicular às linhas de campo, o fluxo através dela é igual ao módulo do campo vezes a sua área:

$$\Phi = E A \cos \theta = (\vec{E} \cdot \hat{n}) A \quad (6.6)$$

A figura 6.9 mostra três possíveis campos na superfície. O campo  $\vec{E}_1$  faz um ângulo agudo com o versor normal e, por isso, produz fluxo positivo, ou seja, fluxo que passa no mesmo sentido do versor normal. O campo  $\vec{E}_2$  é perpendicular à superfície e, como tal, o seu produto escalar com o versor normal é nulo e esse campo não produz nenhum fluxo. Finalmente, o campo  $\vec{E}_3$  faz um ângulo obtuso com o versor normal, produzindo assim fluxo negativo, ou seja, fluxo no sentido oposto do versor normal.

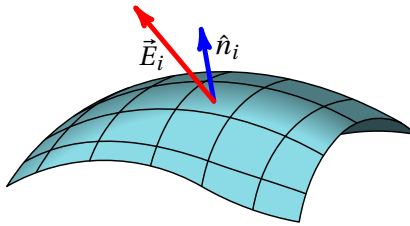


**Figura 6.9.:** Campo e versor normal.

O produto escalar  $\vec{E} \cdot \hat{n}$  é a componente do campo na direção normal à superfície. Como tal, o fluxo elétrico é a componente normal do campo vezes a área da superfície.

No caso de campos não uniformes e superfícies curvas, divide-se a superfície em  $m$  segmentos com áreas  $\Delta A_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ), como na figura 6.10. Se

o número de segmentos for elevado e cada um deles for suficientemente pequeno, podem ser aproximados por pequenos planos.



**Figura 6.10.:** Superfície dividida em segmentos menores.

No plano infinitesimal de área  $\Delta A_i$  o campo será  $\vec{E}_i$ , aproximadamente constante, de forma que o fluxo  $\Phi_i$  nele é dado pela equação 6.6. O fluxo total na superfície é igual à soma de todos os fluxos nos pequenos planos.

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^m \vec{E}_i \cdot \hat{n}_i \Delta A_i \quad (6.7)$$

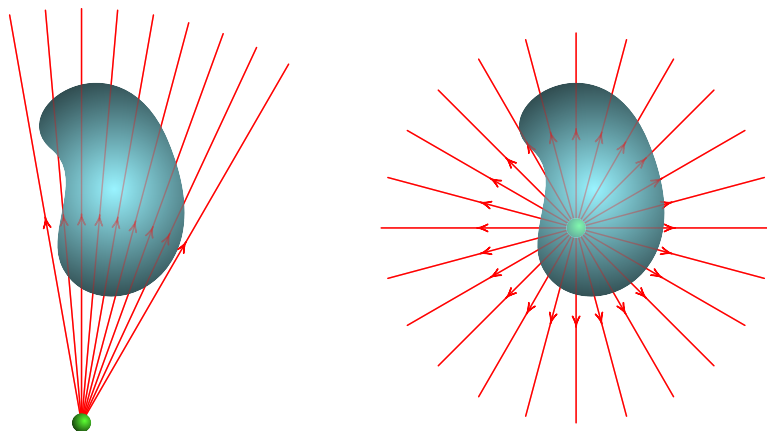
A aproximação torna-se exata no limite em que  $m$  se aproxima de infinito. Essa soma de uma função (neste caso a componente normal do campo) vezes a área da superfície chama-se **integral de superfície**, escrito da forma seguinte:

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA \quad (6.8)$$

Nos casos estudados neste capítulo, esse integral de superfície pode ser obtido facilmente, sem ser preciso entrarmos nos pormenores do cálculo de integrais de superfície.

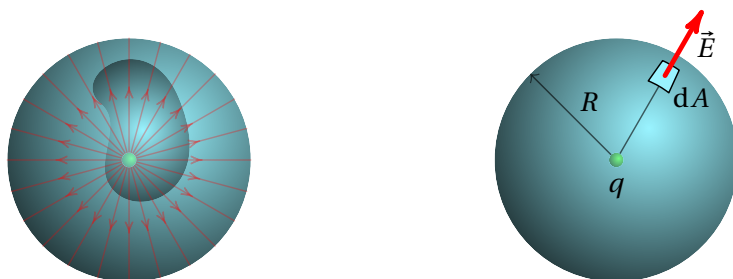
## 6.4. Lei de Gauss

O campo elétrico produzido por uma distribuição de cargas é a sobreposição dos campos produzidos por muitas cargas pontuais. Convém então analisar o fluxo elétrico produzido pelo campo de uma única carga pontual. Em relação a uma superfície  $S$  fechada, a carga pode estar ou fora ou dentro dessa superfície, tal como mostra a figura 6.11. Se a carga estiver fora, apenas algumas linhas de campo atravessam a superfície; se a carga estiver dentro de  $S$ , todas as linhas de campo a atravessam.



**Figura 6.11.:** Carga pontual fora de uma superfície fechada e dentro dela.

Quando a carga pontual está dentro da superfície  $S$ , qualquer esfera com centro na carga também é atravessada por todas as linhas de campo elétrico e, como tal, encontra-se no mesmo tubo de fluxo de  $S$  (figura 6.12). O fluxo elétrico através de  $S$  pode ser determinado calculando o fluxo que atravessa a esfera. No lado direito da figura 6.12 mostra-se o campo num ponto da esfera.



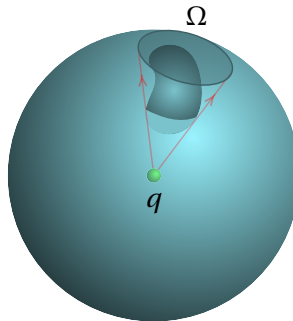
**Figura 6.12.:** Fluxo produzido por uma carga pontual dentro de uma superfície fechada.

Na superfície esférica, o campo é sempre perpendicular e o seu módulo é sempre igual a  $E = k|q|/R^2$ , onde  $R$  é o raio da esfera. Como tal, o fluxo na esfera pode obter-se usando a equação 6.5. A área da esfera é  $4\pi R^2$ , e multiplicando pelo módulo do campo obtém-se o fluxo:

$$\Phi = 4\pi R^2 \left( \frac{k|q|}{R^2} \right) = 4\pi k|q| \quad (6.9)$$

Ou seja que, o fluxo total produzido pela carga pontual  $q$ , através de qualquer superfície fechada em que a carga esteja no interior, é sempre  $4\pi k|q|$ , independentemente do tamanho da superfície. No caso de superfícies fechadas, é habitual calcular-se sempre o fluxo para fora da superfície. Assim sendo, o sinal da carga dá o sinal correto do fluxo na expressão  $4\pi kq$ ; se a carga for positiva há fluxo para fora da superfície, mas se a carga for negativa o fluxo será para dentro dela.

Se a carga está fora de  $S$ , as linhas de campo que atravessam a superfície estão dentro de um ângulo sólido  $\Omega$ , menor que o ângulo total  $4\pi$  da esfera toda (figura 6.13). Se imaginarmos que a carga é uma fonte de luz, esse ângulo sólido é a sombra projetada pela superfície  $S$  numa esfera; uma parte,  $S_1$ , da superfície estará iluminada e a outra parte,  $S_2$ , estará na escuridão. Se  $q$  for positiva, pela superfície  $S_1$  entra fluxo elétrico e esse mesmo fluxo sai todo pela superfície  $S_2$ ; se  $q$  for negativa, o mesmo fluxo que entra por  $S_2$  sai por  $S_1$ . Como tal, o fluxo total através de  $S$  é nulo.



**Figura 6.13.:** Carga pontual fora de uma superfície fechada.

Conclui-se então que o fluxo elétrico devido a uma carga pontual  $q$  é nulo em qualquer superfície fechada, se a carga estiver fora da superfície, e igual a  $4\pi kq$  se a carga estiver dentro da superfície.

Uma distribuição de carga pode ser dividida em várias cargas pontuais  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , e o fluxo total através de uma superfície fechada  $S$  será igual à soma dos  $n$  fluxos produzidos por cada uma das cargas pontuais. As cargas que se encontram no exterior de  $S$  não produzem fluxo, e cada carga  $q_i$  que esteja dentro de  $S$  produz fluxo  $4\pi kq_i$ . Como tal, o fluxo total através da superfície fechada  $S$  é:

$$\Phi(S \text{ fechada}) = 4\pi k q_{\text{int}} \quad (6.10)$$

onde  $q_{\text{int}}$  é a carga total no interior da superfície S. Esta equação chama-se **lei de Gauss**:

*O fluxo elétrico através de qualquer superfície fechada é igual ao valor da carga total no interior da superfície, multiplicado por  $4\pi k$ .*

Se a carga total no interior for positiva, o fluxo é positivo, indicando que há linhas de campo a saírem da superfície. Se a carga total for negativa, o fluxo é negativo porque há linhas de campo a entrar na superfície.

O fluxo elétrico total à volta de uma carga pontual é diretamente proporcional ao valor da carga. Em alguns casos é possível desenhar um número de linhas de campo proporcional à carga, para dar uma ideia mais aproximada do valor do fluxo em diferentes regiões; por exemplo, na figura 6.2 foram desenhadas 8 linhas de campo a saírem da carga de 4 nC, e 18 linhas a saírem da carga de 9 nC.

A lei de Gauss é muito útil para calcular campos elétricos de sistemas com simetria, como se verá nas seções seguintes.

### Exemplo 6.2

Um eletrão encontra-se no centro de um cubo cuja aresta mede 20 nm. Determine o fluxo elétrico através de uma das faces do cubo.

**Resolução.** A superfície total do cubo é fechada e portanto o fluxo através do dele pode calcular-se facilmente usando a lei de Gauss:

$$\Phi = 4\pi k q_{\text{int}}$$

A carga interna  $q_{\text{int}}$  é a carga do eletrão ( $-1.602 \times 10^{-19}$  C). Assim, o fluxo total através do da superfície do cubo é:

$$\Phi = 4\pi \times 9 \times 10^9 \times (-1.602 \times 10^{-19}) = -18.09 \times 10^{-9} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}}$$

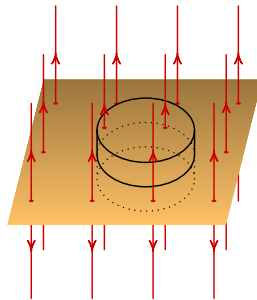
Por simetria, o fluxo através de cada face deve ser o mesmo, pelo que o fluxo numa face é a sexta parte do fluxo total no cubo:  $-3.02 \text{ nN} \cdot \text{m}^2/\text{C}$ . O sinal negativo do resultado indica que o fluxo é para dentro do cubo.

### 6.4.1. Campo de um plano

Considere-se um plano, com carga distribuída uniformemente. Visto em corte, o plano aparece como um segmento de reta, e as linhas de campo são semelhantes às linhas representadas na figura 6.5.

Nas regiões perto da zona central do plano, as linhas de campo são aproximadamente paralelas entre si. Quanto maior for o plano, maior é a região onde as linhas são aproximadamente paralelas. No caso idealizado de um plano infinito, as linhas são mesmo paralelas e o valor do campo depende apenas da distância ao plano, já que a aparência do plano é a mesma em qualquer ponto.

Para calcular o campo elétrico usando a lei de Gauss, imagine-se um cilindro com a base e o topo paralelos ao plano, como se mostra na figura 6.14.



**Figura 6.14.:** Cilindro imaginário usado para calcular o campo do plano.

As paredes laterais do cilindro não são atravessadas pelo fluxo elétrico, porque o campo é paralelo à superfície. Em cada uma das tampas circulares do cilindro, o campo é perpendicular e tem módulo constante, pois todos os pontos na tampa estão à mesma distância do plano. O fluxo na base e no topo do cilindro é então  $AE$ , em que  $A$  é a área da base do cilindro e o fluxo total através da superfície do cilindro é:

$$\Phi = 2AE \quad (6.11)$$

De acordo com a lei de Gauss, esse fluxo também é igual a:

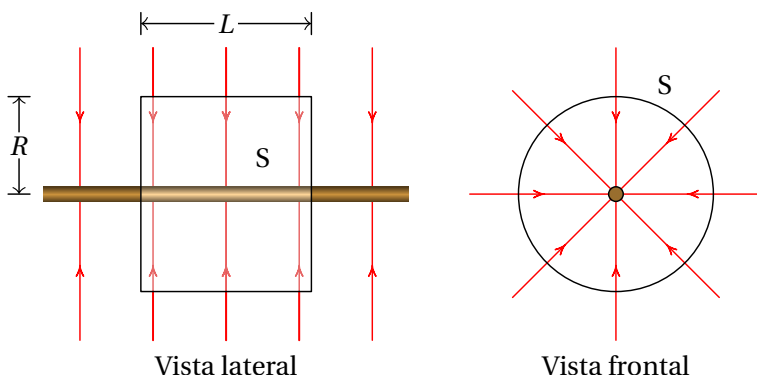
$$\Phi = 4\pi kQ \quad (6.12)$$

onde  $Q$  é a carga na parte do plano que está dentro do cilindro. Igualando as duas últimas equações obtém-se o módulo do campo:

$$E_{\text{plano}} = 2\pi k\sigma \quad (6.13)$$

em que  $\sigma$  é a **carga superficial**, isto é, carga por unidade de área:  $\sigma = Q/A$ .

### 6.4.2. Campo de um fio retilíneo



**Figura 6.15.:** Linhas de campo de um fio retilíneo e superfície cilíndrica usada para calcular o campo.

Considere-se um fio retilíneo muito comprido, com carga distribuída uniformemente. As linhas de campo deverão ter a direção radial. Imaginando uma superfície fechada que é um cilindro de raio  $R$  e altura  $L$ , com eixo sobre o fio, como mostra a figura 6.15, conclui-se que o fluxo é nulo nas tampas circulares do cilindro, pois sobre elas o campo é paralelo à superfície; na parede lateral do cilindro, o campo é perpendicular e com módulo constante. Assim, o fluxo total será:

$$\Phi = 2\pi RLE \quad (6.14)$$

onde  $E$  é o módulo do campo à distância  $R$  do fio. De acordo com a lei de Gauss, esse fluxo dever ser também igual a

$$\Phi = 4\pi kQ \quad (6.15)$$

onde  $Q$  é a carga do fio que está dentro do cilindro  $S$ . Igualando as duas equações anteriores, obtém-se o módulo do campo:

$$E_{\text{fio}} = \frac{2k\lambda}{R} \quad (6.16)$$

em que  $\lambda$  é a **carga linear** (carga por unidade de comprimento):  $\lambda = Q/L$ .

### 6.4.3. Campo de uma esfera condutora

Numa esfera condutora, com carga  $Q$  e raio  $a$ , a força repulsiva entre as cargas do mesmo sinal, faz com que as cargas se distribuam de modo uniforme sobre a superfície da esfera. Existe então simetria esférica e as linhas de campo devem apontar na direção radial.

Para calcular o campo, imagine-se uma esfera de raio  $r$ , concêntrica com a esfera condutora. O campo é perpendicular à superfície e tem módulo constante  $E$ ; como tal, o valor do fluxo elétrico é:

$$\Phi = 4\pi r^2 E \quad (6.17)$$

Como a carga está distribuída na superfície da esfera condutora, no se interior não existe carga e, segundo a lei de Gauss, o fluxo através da esfera de raio  $r$  será nulo, se  $r < a$ , ou igual a  $4\pi kQ$  se  $r > a$ . Em consequência, o campo elétrico é nulo no interior da esfera, e fora dela tem módulo:

$$E = \frac{kQ}{r^2} \quad (6.18)$$

que é mesma expressão do campo produzido por uma carga  $Q$  concentrada no centro da esfera. Este é o mesmo resultado encontrado no apêndice B, usando um método mais complicado (integração).

## Perguntas

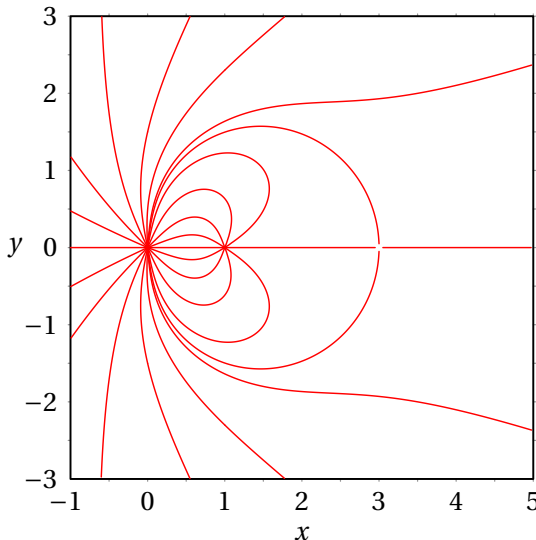
1. Um plano com  $2500 \text{ cm}^2$  de área tem uma carga total de  $20 \text{ nC}$ , distribuída uniformemente. O módulo do campo elétrico perto do plano é, aproximadamente:
  - A.  $18.1 \text{ mN/C}$
  - B.  $4.52 \text{ kN/C}$
  - C.  $1.81 \text{ N/C}$
  - D.  $45.2 \text{ N/C}$
  - E.  $0.452 \text{ N/C}$



2. Uma esfera condutora de 3 cm de raio, isolada e com carga positiva, produz um campo de módulo  $36 \mu\text{N}/\text{nC}$ , num ponto que se encontra a 1 cm da superfície da esfera. Calcule a carga total da esfera.
- A. 3.6 nC  
B. 0.4 nC  
C. 1.6 nC  
D. 6.4 nC  
E. 1.2 nC
3. Num sistema de coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  (em metros), existe uma carga pontual de 2 nC em  $(1,0,0)$ , uma carga pontual de  $-4$  nC em  $(0,2,0)$  e uma carga pontual de 3 nC em  $(0,0,4)$ . Calcule o fluxo elétrico (em unidades SI) através de uma esfera de raio 3 m, com centro na origem.
- A.  $36\pi$   
B.  $72\pi$   
C.  $-72\pi$   
D.  $108\pi$   
E.  $-144\pi$
4. Uma esfera isoladora de raio 1 m tem carga distribuída de forma desconhecida. O fluxo do campo elétrico criado por essa esfera através de uma superfície esférica de raio 4 m, concêntrica com a esfera isoladora, é  $11.3 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$ . Qual é o fluxo do campo elétrico através de uma superfície esférica de raio 2 m concêntrica com a esfera isoladora?
- A.  $45.2 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$   
B.  $22.6 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$   
C.  $11.3 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$   
D.  $56.5 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$   
E.  $28.2 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$
5. Se numa superfície fechada o campo elétrico aponta para dentro da superfície em todos os pontos, o que é que podemos concluir?
- A. Existe carga positiva dentro da superfície.  
B. Existe carga negativa dentro da superfície.  
C. Não existe nenhuma carga dentro da superfície.  
D. O campo é necessariamente perpendicular à superfície.  
E. O campo é necessariamente paralelo à superfície.

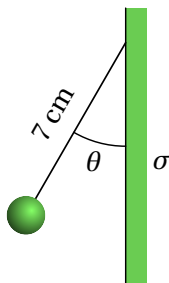
## Problemas

1. Na atmosfera existe um campo elétrico que aponta na vertical, para baixo. A nível do mar, o módulo desse campo, é aproximadamente  $120 \text{ N/C}$  e diminui em função da altura;  $2 \text{ km}$  acima do nível do mar o campo é aproximadamente  $66 \text{ N/C}$ . Que pode concluir acerca do sinal das cargas livres nos dois primeiros quilómetros da atmosfera? Calcule a carga volúmica média nessa região.
2. Uma carga pontual de  $5 \text{ nC}$  encontra-se a  $6 \text{ cm}$  de um fio retilíneo muito comprido, com carga linear constante de  $7 \text{ nC/cm}$ . Calcule a força elétrica sobre o fio (sugestão: calcule melhor a força do fio sobre a carga pontual, que é mais fácil de calcular, e pela lei de ação e reação deverá ter o mesmo módulo).
3. A figura mostra as linhas de campo elétrico de duas partículas carregadas, uma delas na origem, e a outra no ponto  $(1, 0)$ . No ponto  $(3, 0)$  existe um ponto de sela. Sabendo que a carga da partícula na origem é  $18 \text{ nC}$ , calcule a carga da outra partícula.



4. Duas cascas esféricas concêntricas, com raios  $a$  e  $b$ , encontram-se uma dentro da outra ( $a < b$ ). A casca esférica interna, de raio  $a$ , tem uma carga total  $Q$  distribuída uniformemente na sua superfície, e a casca externa tem uma carga  $-Q$ , distribuída uniformemente na sua superfície. Usando a lei de Gauss, calcule o campo elétrico nos pontos dentro da casca interna, entre as duas cascas e por fora da casca externa.

5. Uma esfera de raio  $R$  tem uma carga elétrica  $Q$  distribuída uniformemente dentro do seu volume. Usando a lei de Gauss, calcule o módulo do campo elétrico num ponto a uma distância  $r$  do centro da esfera. Considere os casos  $r \geq R$  e  $r < R$ .
6. Uma partícula pontual com massa igual a 25 g e carga de 50 nC encontra-se pendurada de um fio de 7 cm que está colado a um plano vertical. O plano vertical tem uma carga superficial constante  $\sigma = 17 \text{ nC/cm}^2$  e pode ser considerado infinito. Calcule o ângulo  $\theta$  que o fio faz com o plano vertical.



7. Para simular as cargas num condensador de placas planas paralelas, considere um sistema de 13 cargas de valor +1 nos pontos  $(-6,5)$ ,  $(-5,5)$ , ...,  $(5,5)$  e  $(6,5)$ , e 13 cargas de valor  $-1$  nos pontos  $(-6,-5)$ ,  $(-5,-5)$ , ...,  $(5,-5)$  e  $(6,-5)$ . Usando Maxima, desenhe o campo elétrico e as linhas de campo (o desenho é independente das unidades que sejam usadas; pode admitir  $k = 1$ ).

## Respostas

Perguntas: 1. B. 2. D. 3. C. 4. C. 5. B.

### Problemas

1. Existe carga positiva, com carga volúmica média igual a  $2.39 \times 10^{-13} \text{ C/m}^3$ .
2. 1.05 mN
3.  $-8 \text{ nC}$ .
4. Dentro da casca interna e fora da casca externa, o campo é nulo. Entre as duas cascas, o campo é na direção radial e com módulo  $kQ/r^2$ , onde  $r$  é a distância desde o centro das esferas.
5. Se  $r \geq R$ ,  $E = \frac{kQ}{r^2}$ . Se  $r < R$ ,  $E = \frac{kQ}{R^3}r$
6.  $62.99^\circ$
7. O gráfico das linhas de campo pode ser obtido com os seguintes comandos:

```
(%i1) E: sum([x-i,y-5]/sqrt((x-i)^2+(y-5)^2)^3
          -[x-i,y+5]/sqrt((x-i)^2+(y+5)^2)^3,i,-6,6)$
(%i2) plotdf(E,[x,y],[x,-20,20],[y,-20,20],[vectors,""]);
```

Após traçar algumas curvas, obtém-se o gráfico:

