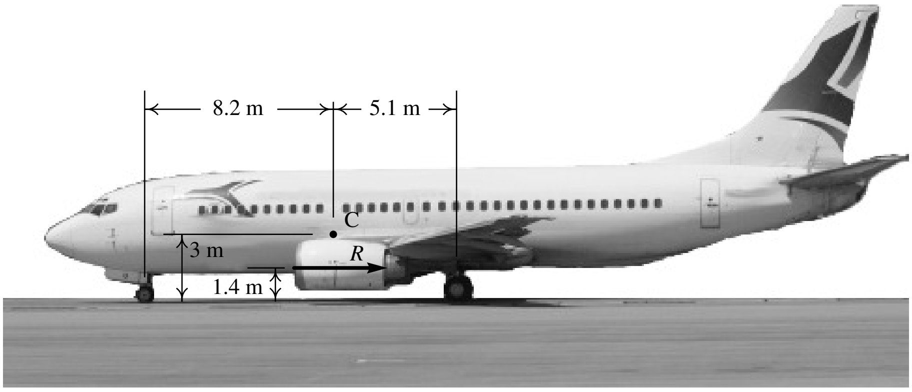
FEUP - MIEIC **FÍSICA I - EIC0010 - 2010/2011**

NOME:________________________________ **LOG-IN FEUP:**__________

Exame de recurso 8 de Julho de 2011

Duração: Duas horas. Com consulta de formulário e utilização de meios de cálculo. Note que os meios de cálculo não podem ser usados como meios de comunicação ou de consulta da matéria! A violação desta regra implica exclusão imediata. Use $g = 9.8$ m/s^2 para a aceleração da gravidade.

1. (4 valores) O avião na figura, com massa total de 1.1×10^5 kg, aterra numa pista horizontal. O ponto C representa o centro de gravidade. No instante em que a velocidade é de 210 km/h (para a esquerda), o piloto liga as turbinas em modo inverso, produzindo a força constante R (representada na figura) e após ter precorrido 580 m na pista a velocidade diminui para 70 km/h. Durante esse percurso, as forças de atrito nos pneus e a resistência do ar podem ser ignoradas, em comparação com a força R que é muito maior. Calcule a reação normal na roda da frente.



2. (4 valores) Uma partícula com massa m desloca-se ao longo do eixo dos x. Em unidades SI, a componente x da força resultante sobre a partícula é dada pela expressão $F = m(x^3 - 2\,x^2 - 3\,x - v)$, onde v é a velocidade e x a posição. (a) Escreva as equações de evolução do sistema. (b) Encontre os pontos de equilíbrio no espaço de fase. (c) Calcule a matriz jacobiana do sistema. (d) Caracterize cada um dos pontos de equilíbrio. (e) Explique se o sistema poderá ter ou não ciclos, órbitas homoclínicas ou órbitas heteroclínicas.

PERGUNTAS. *Cotação:* Respostas certas, 0.8, erradas, −0.2, em branco, 0. Cada pergunta tem uma única resposta. Serão avaliadas apenas as respostas que apareçam na caixa de **Resposta** (e não na folha de exame ou de rascunho).

3. Qual dos seguintes sistemas não pode ser caótico?

(A) Um sistema autónomo com 4 variáveis de estado.

(B) Um sistema linear com 4 variáveis de estado.

(C) Um pêndulo duplo (dois pêndulos, um pendurado do outro).

(D) Um sistema autónomo com 3 variáveis de estado.

(E) Um sistema de 4 espécies.

Resposta: ☐

4. Qual das matrizes na lista é a matriz jacobiana do sistema dinâmico equivalente à equação diferencial $2\,\ddot{x}\,x - 2\,x^2\,\dot{x} + 4\,x^3 = 0$?

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

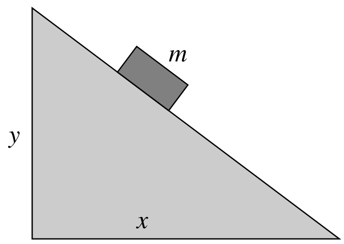
(C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4\,y - 2 & 4\,x \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

(E) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ y - 4\,x & x \end{bmatrix}$

Resposta: ☐

5. Um bloco de massa 7 kg desce deslizando sobre a superfície de um plano inclinado com base $x = 4$ m e altura $y = 6$ m. Calcule o módulo da reação normal do plano sobre o bloco.



(A) 114.16 N **(B)** 38.05 N **(C)** 68.60 N **(D)** 22.87 N **(E)** 19.03 N

Resposta: ☐

6. Um objecto desloca-se ao longo do eixo dos x. Em qualquer ponto com coordenada x, a aceleração do objecto é dada pela expressão $a = 1\,x^4$ (unidades SI). Se o objecto parte do repouso no ponto $x = 1$ m, com que velocidade chegará ao ponto $x = 2$ m?

(A) 4.59 m/s **(B)** 3.52 m/s **(C)** 2.47 m/s **(D)** 5.66 m/s **(E)** 1.41 m/s

Resposta: ☐

7. As equações de um sistema dinâmico com variáveis de estado $(x,\,y)$ foram transformadas para coordenadas polares $(r,\,\theta)$, obtendo-se as equações:

$$\dot{\theta} = -2 \qquad \dot{r} = r^2 - 3\,r$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(**A**) Existe um ciclo limite atrativo em $r = 2$
(**B**) Existe um ciclo limite atrativo em $r = 3$
(**C**) Existe um ciclo limite atrativo em $r = 0$
(**D**) Existe um ciclo limite repulsivo em $r = 3$
(**E**) Existe um ciclo limite repulsivo em $r = 2$

Resposta: ☐

8. Um caixote de massa 0.5 kg é puxado simultâneamente por duas forças $4\vec{e}_x - 11\vec{e}_y$ (N) e $3\vec{e}_x + 7\vec{e}_y$ (N). Calcule a aceleração do caixote.

(**A**) $6\vec{e}_x + 14\vec{e}_y$ (m/s^2)
(**B**) $3.5\vec{e}_x - 2.0\vec{e}_y$ (m/s^2)
(**C**) $8\vec{e}_x - 22\vec{e}_y$ (m/s^2)
(**D**) $14\vec{e}_x - 8\vec{e}_y$ (m/s^2)
(**E**) $7\vec{e}_x - 4\vec{e}_y$ (m/s^2)

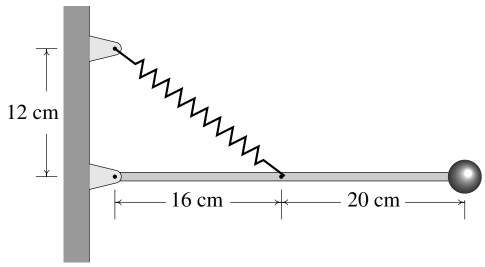
Resposta: ☐

9. A força resultante sobre um objeto de massa 2 kg é $\vec{F} = 9\,\vec{e}_x + 1\,t\,\vec{e}_y$ (SI). Se a velocidade do objeto em $t = 0$ for $3\,\vec{e}_x + 4\,\vec{e}_y$ m/s, calcule a velocidade em $t = 7$ s.

(**A**) $34.5\,\vec{e}_x + 12.3\,\vec{e}_y$
(**B**) $31.5\,\vec{e}_x + 12.3\,\vec{e}_y$
(**C**) $34.5\,\vec{e}_x + 16.3\,\vec{e}_y$
(**D**) $66.0\,\vec{e}_x + 28.5\,\vec{e}_y$
(**E**) $34.5\,\vec{e}_x + 7.5\,\vec{e}_y$

Resposta: ☐

10. Na figura, a mola elástica é usada para manter a barra na posição horizontal. Sabendo que a constante elástica da mola é igual a 300 N/m e o seu comprimento, quando não está comprida nem esticada, é 15 cm, calcule a energia elástica da mola na situação apresentada na figura.



(**A**) 375 mJ
(**B**) 735 mJ
(**C**) 135 mJ
(**D**) 540 mJ
(**E**) 240 mJ

Resposta: ☐

11. Um sistema dinâmico com duas variáveis de estado tem uma curva de evolução com conjunto limite negativo num ponto P. Em relação à lista seguinte:

1. foco atrativo.
2. foco repulsivo.
3. nó atrativo.
4. nó repulsivo.
5. centro.

Que tipo de ponto de equilíbrio pode ser o ponto P?

(**A**) 1 ou 2
(**B**) 2 ou 4
(**C**) 3 ou 4
(**D**) 1 ou 3
(**E**) 5

Resposta: ☐

12. O comando
`a:rk([f,g],[y,z],[0,1],[x,0,1,0.01])`
do Maxima foi usado para resolver numericamente um sistema de equações. A seguir, o comando `last(a)[2]` mostrará o valor:

(**A**) inicial de y
(**B**) final de y
(**C**) inicial de x
(**D**) final de z
(**E**) final de x

Resposta: ☐

13. Num sistema que se desloca no eixo dos x, a força resultante é $x^2 + x - 2$. Na lista seguinte, qual dos valores corresponde à posição x dum ponto de equilíbrio estável?

(**A**) 1
(**B**) -1
(**C**) 3
(**D**) 2
(**E**) -2

Resposta: ☐

14. Uma partícula com massa igual a 3 (unidades SI) desloca-se no eixo dos y sob a acção de uma força resultante $2\,y + 6\,v$, onde v é a velocidade. Qual das matrizes na lista é a matriz do sistema?

(**A**) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2/3 \end{bmatrix}$
(**B**) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$
(**C**) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 18 \end{bmatrix}$
(**D**) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$
(**E**) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2/3 & 2 \end{bmatrix}$

Resposta: ☐

15. A matriz jacobiana de um sistema não linear, num ponto P do espaço de fase (x, y), foi armazenada na variável `J`, no Maxima. O comando `eigenvectors(J)` produz: `[[[-1,-2], [1,1]], [[[1,-1]], [[1,1/3]]]]` que tipo de ponto de equilíbrio é o ponto P?

(**A**) centro.
(**B**) foco repulsivo.
(**C**) foco atractivo.
(**D**) nó atractivo.
(**E**) ponto de sela.

Resposta: ☐

16. Um bloco de massa 1 kg desce deslizando sobre a superfície de um plano inclinado, partindo do ponto A com valor da velocidade igual a 5 m/s e parando completamente no ponto B. As alturas dos pontos A e B, medidas na vertical desde a base horizontal do plano, são: $h_B = 10$ cm e $h_A = 100$ cm. Calcule o trabalho realizado pela força de atrito, desde A até B.

(**A**) -18.4 J
(**B**) -21.3 J
(**C**) -19.4 J
(**D**) -20.3 J
(**E**) -17.4 J

Resposta: ☐

17. Qual das seguintes equações podera ser uma das equações de evolução num sistema predador presa?

(**A**) $\dot{y} = 2\,y - 5\,y^2$
(**B**) $\dot{y} = 6\,y + x\,y$
(**C**) $\dot{y} = x + x\,y^2$
(**D**) $\dot{y} = 2\,y^2 - 3\,y$
(**E**) $\dot{y} = 6\,y - y^2$

Resposta: ☐

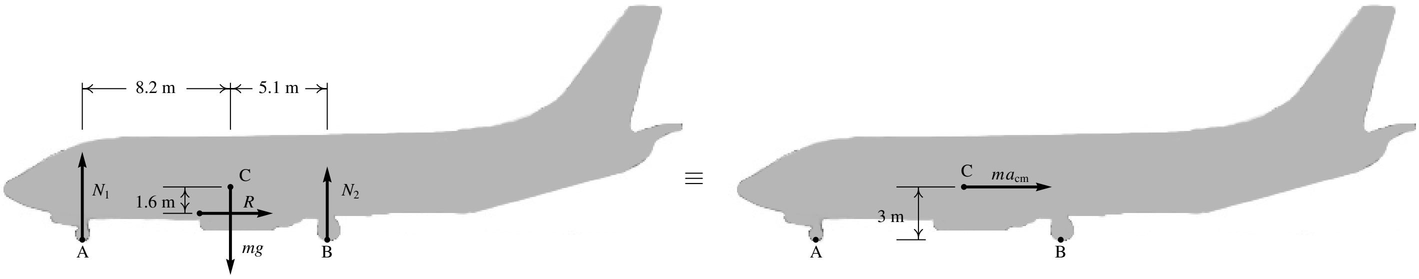
FEUP - MIEIC **FÍSICA 1 - EIC0010 - 2010/2011**

Exame de Recurso **Resolução**

8 de Julho de 2011 Jaime Villate

Problemas

1. (*a*) A figura seguinte mostra, no lado esquerdo, o **diagrama de corpo livre** indicando todas as forças externas sobre o avião: o peso $m\vec{g}$, a força $\vec{R}$ e as reações normais nos pneus $\vec{N}_1$ e $\vec{N}_2$. O lado direito mostra o **diagrama equivalente**, com a força resultante $m\vec{a}_{\text{cm}}$ e sem momento resultante, já que o avião não roda.



Comparando as componentes x e y e os momentos em relação ao centro de massa, nos dois lados da figura, obtêm-se as seguintes equações:

$$R = m\,a_{\text{cm}}$$
$$N_1 + N_2 - m\,g = 0$$
$$8.2 N_1 - 5.1 N_2 - 1.6 R = 0$$

Como a força R permanece constante, a primeira equação implica que a aceleração do centro de massa também será constante e pode integrar-se a equação de movimento:

$$a_{\text{cm}} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \quad\Longrightarrow\quad a_{\text{cm}}\int_0^{580}\mathrm{d}x = \int_{210/3.6}^{70/3.6} v\,\mathrm{d}v \quad\Longrightarrow\quad 580\,a_{\text{cm}} = \frac{1}{2\times 3.6^2}\left(70^2 - 210^2\right) \quad\Longrightarrow\quad a_{\text{cm}} = -2.61\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

O sinal negativo indica que é no sentido oposto à velocidade. Consequentemente:

$$R = 1.1\times 10^5 \times 2.61 = 287\times 10^3\ \text{N}$$

Substituindo esse valor na equação da soma dos momentos, pode resolver-se o sistema de duas equações para N_1 e N_2. Outra forma mais direta de calcular N_1 consiste em comparar momentos em relação ao ponto B, nos dois lados da figura acima:

$$13.3 N_1 - 5.1\times 1.1\times 10^5 \times 9.8 + 1.4\times 287\times 10^3 = 3\times 1.1\times 10^5\times 2.61 \quad\Longrightarrow\quad N_1 = 448\times 10^3\ \text{N}$$

2. (*a*) As equações de evolução são:

$$\dot{x} = v$$
$$\dot{v} = x^3 - 2x^2 - 3x - v$$

(*b*) Nos pontos de equilíbrio os dois lados direitos das equações de evolução anulam-se. Assim, $v = 0$ e:

$$x\left(x^2 - 2x - 3\right) = 0 \quad\Longrightarrow\quad x = 0 \quad\vee\quad x = 3 \quad\vee\quad x = -1$$

(*c*) A matriz jacobiana do sistema é:

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial\left(x^3 - 2x^2 - 3x - v\right)}{\partial x} & \dfrac{\partial\left(x^3 - 2x^2 - 3x - v\right)}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3x^2 - 4x - 3 & -1 \end{bmatrix}$$

(d) No ponto $(x,v) = (0,0)$:

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

O traço é -1 e o determinante é 3. A equação caraterística é:

$$\lambda^2 + \lambda + 3 = 0$$

com raízes $\lambda = -0.5 \pm \sqrt{-2.75}$, nomeadamente, complexas com parte real negativa. O ponto $(0,0)$ é foco atrativo.

No ponto $(x,v) = (3,0)$:

$$J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 12 & -1 \end{bmatrix}$$

Como o determinante dessa matriz é negativo, o ponto é ponto de sela.

No ponto $(x,v) = (-1,0)$:

$$J_{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}$$

Como o determinante da matriz é negativo, esse ponto também é ponto de sela.

(e) O traço da matriz jacobiana é igual a -1 em todos os pontos do espaço de fase. Portanto, o critério de Bedixson implica que o sistema não pode ter nenhum ciclo, nem órbita homoclínica, nem órbita heteroclínica.

Perguntas

3. B

4. E

5. B

6. B

7. D

8. D

9. C

10. A

11. B

12. B

13. E

14. E

15. D

16. B

17. B