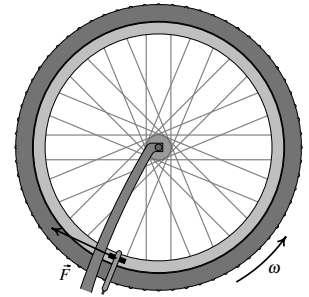


Prova com consulta de formulário e uso de computador. Duração 2 horas.

Nome do estudante: _____

Pode consultar unicamente um formulário (uma folha A4) e utilizar calculadora ou PC. Note que os meios de cálculo não podem ser usados como meios de comunicação ou de consulta da matéria! A violação desta regra implica exclusão imediata. Use $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ para a aceleração da gravidade.

1. (4 valores) Para testar os travões, uma bicicleta foi colocada com as rodas para o ar e a roda foi posta a rodar livremente, como mostra a figura. Foi medido o tempo que a roda demorou a dar 10 voltas, obtendo-se o valor de 8.2 s (admita que nesse intervalo a velocidade angular ω permanece constante). Imediatamente a seguir, aplicaram-se os travões e a roda demorou 2.9 s até parar completamente. A figura mostra a força de atrito \vec{F} entre os calços e o aro, que é tangente ao aro e aplicada a uma distância de 27.1 cm do eixo da roda. (a) Admitindo que a força \vec{F} é constante, a aceleração angular que ela produz também será constante; calcule essa aceleração angular. (b) Calcule o número de voltas efetuadas pela roda durante o tempo em que os travões atuaram. (c) Sabendo que o momento de inércia da roda, em relação ao seu centro, é igual a $0.135 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, calcule o módulo da força \vec{F} .



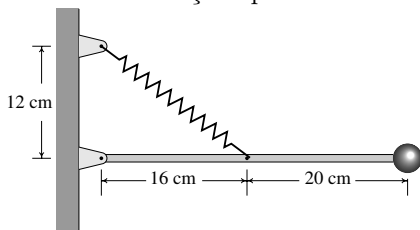
2. (4 valores) Um objeto de massa $m = 0.3 \text{ kg}$ desloca-se no eixo dos x . Se x e v representam a posição e velocidade do centro de massa, a expressão para a energia mecânica total do objeto é: $H = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$ (unidades SI)

As equações de evolução podem ser obtidas aplicando as equações de Hamilton: $\dot{x} = \frac{1}{m} \frac{\partial H}{\partial v}$ $\dot{v} = -\frac{1}{m} \frac{\partial H}{\partial x}$

(a) Escreva as equações de evolução do sistema. (b) Encontre os pontos de equilíbrio no espaço de fase. (c) Calcule a matriz jacobiana do sistema. (d) Demonstre que este sistema tem ciclos e calcule a frequência de oscilação f desses ciclos.

PERGUNTAS. Respostas certas, 0.8 valores, erradas, -0.2, em branco, 0.

3. Na figura, a mola elástica é usada para manter a barra na posição horizontal. Sabendo que a constante elástica da mola é igual a 600 N/m e o seu comprimento, quando não está comprida nem esticada, é 15 cm , calcule a energia elástica da mola na situação apresentada na figura.



- (A) 270 mJ (C) 1080 mJ (E) 750 mJ
(B) 480 mJ (D) 1470 mJ

Resposta:

4. Qual das seguintes equações poderia ser uma das equações de evolução num sistema predador presa?

- (A) $\dot{y} = 6y - y^2$ (D) $\dot{y} = 2y - 5y^2$
(B) $\dot{y} = 2y^2 - 3y$ (E) $\dot{y} = 6y + xy$
(C) $\dot{y} = x + xy^2$

Resposta:

5. Sabendo que a distância média entre a Terra e a Lua é $3.84 \times 10^8 \text{ m}$, e que a Lua demora 27.3 dias a completar a sua órbita à volta da Terra, calcule o módulo da aceleração da Lua, em m/s^2 , admitindo que a sua órbita seja circular.

- (A) 1.38×10^{-10} (D) 3.53×10^4
(B) 1.57 (E) 2.72×10^{-3}
(C) 2.03×10^7

Resposta:

6. Se o ponto de equilíbrio de um sistema linear é um foco atrativo, qual das afirmações seguintes, acerca da matriz do sistema, é verdadeira?

- (A) o determinante é nulo
(B) o traço é negativo
(C) o determinante é negativo
(D) o traço é positivo
(E) o traço é nulo.

Resposta:

7. A velocidade de um avião em relação ao ar é 800 km/h, na direção norte. Nesse instante, a velocidade do vento é de 70 km/h, em direção este. Calcule a velocidade do avião em relação à terra.

- (A) 716 km/h (C) 730 km/h (E) 870 km/h
 (B) 884 km/h (D) 803 km/h

Resposta:

8. Um objecto desloca-se ao longo do eixo dos x . Em qualquer ponto com coordenada x , a aceleração do objecto é dada pela expressão $a = 4x^3$ (unidades SI). Se o objecto parte do repouso no ponto $x = 1$ m, com que velocidade chegará ao ponto $x = 2$ m?

- (A) 4.15 m/s (C) 2.83 m/s (E) 5.48 m/s
 (B) 8.00 m/s (D) 6.74 m/s

Resposta:

9. Um bloco de massa 5 kg desce deslizando sobre a superfície de um plano inclinado com base $x = 2$ m e altura $y = 7$ m. Calcule o módulo da reação normal do plano sobre o bloco.

- (A) 94.23 N (C) 6.73 N (E) 13.46 N
 (B) 49.0 N (D) 7.0 N

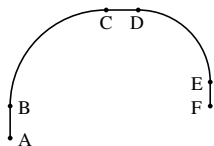
Resposta:

10. O vetor velocidade de um objeto, em função do tempo, é: $\vec{v} = 3e^{-t}\vec{e}_x + 4t^2\vec{e}_y$ (unidades SI). Calcule o vetor deslocamento entre $t = 1$ e $t = 2$.

- (A) $2.6\vec{e}_x + 11.0\vec{e}_y$ (D) $-0.41\vec{e}_x + 11.0\vec{e}_y$
 (B) $-1.1\vec{e}_x + 1.3\vec{e}_y$ (E) $1.9\vec{e}_x + 1.3\vec{e}_y$
 (C) $0.7\vec{e}_x + 9.3\vec{e}_y$

Resposta:

11. Uma partícula segue a trajetória que mostra a figura. A partícula parte do repouso em A, acelerando com aceleração constante até o ponto B; desde B até E mantém a sua velocidade constante e a partir de E começa a abrandar, com aceleração constante, até parar no ponto F. A distância AB é 20 cm, CD é 20 cm, EF é 15 cm; o raio do arco BC é 60 cm e o raio do arco DE é 45 cm. Em qual dos segmentos na lista o módulo da aceleração foi maior?



- (A) EF (C) BC (E) AB
 (B) DE (D) CD

Resposta:

12. A velocidade de uma partícula que se desloca em uma dimensão é dada pela expressão $2/s$ onde s é a posição. Encontre a expressão para a aceleração tangencial em função de s .

- (A) $-4/s^3$ (D) $2 \log s$
 (B) $-2/s^2$ (E) $2/(st)$
 (C) $2/s^2$

Resposta:

13. O comando

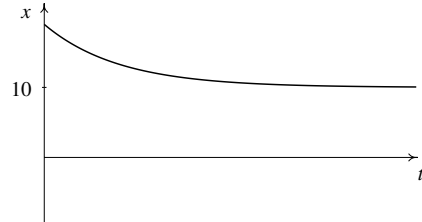
`a:rk([-x,y],[y,z],[0,1],[t,1,3,0.1])`

do Maxima foi usado para resolver numericamente um sistema dinâmico. Qual dos comandos na lista poderá ser usado para obter o valor da variável y no instante $t = 1.2$?

- (A) `a[2][2]` (C) `a[1][2]` (E) `a[3][1]`
 (B) `a[3][2]` (D) `a[2][3]`

Resposta:

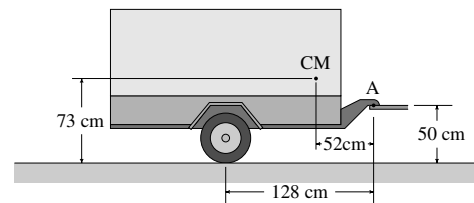
14. Um sistema dinâmico com duas variáveis de estado x e y tem um ponto de equilíbrio no ponto $x = 10, y = 5$. O gráfico mostra a evolução da variável x em função de tempo. Que tipo de ponto é esse ponto de equilíbrio?



- (A) nó atrativo (D) centro
 (B) foco repulsivo (E) nó repulsivo
 (C) foco atrativo

Resposta:

15. O reboque na figura, com peso total P , está ligado no ponto A por uma trela que sai da parte posterior de um automóvel. Se o reboque estiver em repouso, e se F for o módulo da força de contacto entre o carro e o reboque, no ponto A, qual das seguintes afirmações é verdadeira?



- (A) $P/2 < F < P$ (D) $0 < F < P/2$
 (B) $F = 0$ (E) $F = P/2$
 (C) $F = P$

Resposta:

16. Na lista seguinte, qual pode ser o conjunto limite negativo de uma trajetória no espaço de fase?

- (A) ciclo limite atrativo (D) ponto de sela
 (B) centro (E) nó atrativo
 (C) foco atrativo

Resposta:

17. Num sistema que se desloca no eixo dos x , a força resultante é $x^2 + x - 2$. Na lista seguinte, qual dos valores corresponde à posição x dum ponto de equilíbrio estável?

- (A) -2 (C) 3 (E) 2
 (B) 1 (D) -1

Resposta:

Resolução do Exame do dia 2 de julho de 2012

Problemas

1. (a) A velocidade angular inicial, no instante em que se aplicam os travões, obtém-se dividindo o ângulo correspondente a dez voltas pelo tempo que a roda demorou a dar essas dez voltas:

$$\omega_0 = \frac{10 \times 2\pi}{8.2} = 7.662 \text{ s}^{-1}$$

e a velocidade angular final é 0. Como a aceleração angular α é constante,

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{0 - 7.662}{2.9} = -2.642 \text{ s}^{-2}$$

- (b) O ângulo percorrido pela roda durante os 2.9 segundos da travagem determina-se integrando uma das equações de movimento:

$$\alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta} \implies \int_0^\theta -2.642 d\theta = \int_{7.662}^0 \omega d\omega \implies -2.642 \theta = -\frac{7.662^2}{2} \implies \theta = 11.11$$

que corresponde a $11.11/(2\pi) = 1.8$ voltas.

- (c) O momento produzido pela força \vec{F} é igual ao momento de inércia da roda, vezes a sua aceleração angular:

$$-F r = I_0 \alpha \implies -0.271 F = -0.135 \times 2.64 \implies F = 1.32 \text{ N}$$

2. (a)

$$\dot{x} = \frac{1}{m} \frac{\partial H}{\partial v} = \frac{m v}{m} = v$$

$$\dot{v} = -\frac{1}{m} \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{1}{m} \left(-\frac{2}{x^2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{20}{3x^2} - \frac{5}{3}$$

- (b) Os pontos de equilíbrio são as soluções do sistema:

$$v = 0$$

$$\frac{20}{3x^2} - \frac{5}{3} = 0 \implies x^2 = 4 \implies x = \pm 2$$

ou seja, há dois pontos de equilíbrio: $(x, v) = (2, 0)$ e $(x, v) = (-2, 0)$.

- (c) A matriz jacobiana do sistema é:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial v} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{20}{3x^2} - \frac{5}{3} \right) & \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{20}{3x^2} - \frac{5}{3} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{40}{3x^3} & 0 \end{bmatrix}$$

- (d) O traço da matriz jacobiana é nulo e o determinante é $40/(3x^3)$. No ponto de equilíbrio com $x = 2$, o determinante é $5/3$ e os valores próprios da matriz jacobiana são:

$$\lambda = \pm i \sqrt{\frac{5}{3}}$$

assim sendo, o ponto em $(x, v) = (2, 0)$ é um centro e existem ciclos na vizinhança desse ponto, com frequência:

$$f = \frac{|\lambda|}{2\pi} = \frac{\sqrt{5/3}}{2\pi} \approx 0.205 \text{ Hz}$$

Perguntas

3. E	6. B	9. E	12. A	15. A
4. E	7. D	10. C	13. B	16. D
5. E	8. E	11. A	14. A	17. A