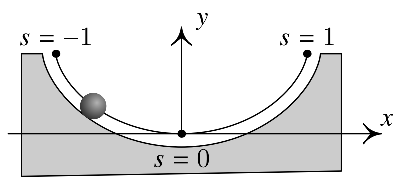
Nome:____

Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador. O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros! Use $g = 9.8$ m/s^2.

1. (4 valores) Uma esfera homogénea de massa m, raio r e momento de inércia, em relação ao seu centro, $I = \frac{2}{5}\,m\,r^2$, roda sem deslizar numa calha no plano vertical xy, de forma que o centro da esfera descreve uma trajetória com forma de cicloide de 2 m de comprimento, tal como mostra a figura. Como tal, a altura y do centro da esfera é dada pela expressão $y = \frac{1}{2}\,s^2$, em que s é o comprimento de arco ao longo da trajetória, com $s = \pm 1$ nos dois extremos e $s = 0$ no ponto meio (y e s em metros). O sistema de eixos tem x horizontal, y vertical e origem no ponto meio da trajetória.



(a) Encontre as expressões da energia potencial da esfera, em função de s, e da energia cinética em função de $\dot{s}$. (b) Encontre a equação de movimento para a aceleração $\ddot{s}$ da esfera, desprezando a resistência do ar. (c) Mostre que se trata de um sistema dinâmico linear e diga de que tipo é o ponto de equilíbrio. (d) Explique como será o movimento da esfera quando for largada do repouso numa posição qualquer s diferente de zero. (e) Determine o tempo que demorará a esfera, largada do repouso em $s \neq 0$, até chegar ao ponto mais baixo, $s = 0$ (observe-se que esse tempo é o mesmo qualquer que for o valor inicial $s \neq 0$).

2. (4 valores) A curvatura de qualquer função $y = f(x)$ pode ser determinada resolvendo um problema de cinemática. Considere-se, por exemplo, a trajetória $y = \cos(x)$. Admitindo uma partícula que se desloca ao longo dessa trajetória, com componente x da velocidade $v_x = 1$, conclui-se então que $x = t$. (a) Escreva a expressão do vetor posição da partícula em função de t e encontre as expressões para os vetores velocidade e aceleração. (b) Determine a expressão da aceleração tangencial, derivando o valor da velocidade, v, em ordem ao tempo. (c) Determine a expressão da aceleração normal. (d) Encontre a expressão do raio de curvatura e substitua $t = x$ para obter a expressão em função de x.

PERGUNTAS. Respostas certas, 0.8 valores, erradas, −0.2, em branco, 0.

3. Num objeto com massa de 0.4 kg atuam unicamente duas forças externas: $2\,\hat{\imath} - 6\,\hat{\jmath}$ e $8\,\hat{\imath} + 10\,\hat{\jmath}$ (ambas em newtons). Determine o módulo da aceleração do centro de massa do objeto.

(A) 26.9 m/s^2 **(C)** 35.0 m/s^2 **(E)** 53.9 m/s^2
(B) 23.3 m/s^2 **(D)** 18.0 m/s^2

Resposta: ☐

4. Num sistema que se desloca no eixo dos x, a força resultante é $x^2 + x - 2$. Na lista seguinte, qual dos valores corresponde à posição x dum ponto de equilíbrio estável?

(A) 3 **(C)** -1 **(E)** -2
(B) 2 **(D)** 1

Resposta: ☐

5. O vetor posição dum ponto, em função do tempo, é dado pela expressão: $3\,t^3\,\hat{\imath} + (t^2 + 2)\,\hat{\jmath}$ (unidades SI). Calcule o ângulo entre os vetores velocidade e posição, no instante $t = 1$.

(A) 68.2° **(C)** 13.0° **(E)** 32.5°
(B) 52.0° **(D)** 42.2°

Resposta: ☐

6. As equações de evolução dum sistema linear, são:
$\dot{x} = a\,x + y \qquad \dot{y} = x + a\,(x + y)$
onde a está no intervalo $a > (1 + \sqrt{5})/2$. Que tipo de ponto de equilíbrio é a origem do espaço de fase?

(A) foco repulsivo **(C)** foco atrativo **(E)** ponto de sela
(B) nó atrativo **(D)** nó repulsivo

Resposta: ☐

7. Um ciclista demora 39 s a percorrer 350 m, numa pista reta e horizontal, com velocidade uniforme. Sabendo que o raio das rodas da bicicleta é 26.8 cm e admitindo que as rodas não deslizam sobre a pista, determine o valor da velocidade angular das rodas.

(A) 28.7 rad/s **(C)** 19.1 rad/s **(E)** 38.3 rad/s
(B) 33.5 rad/s **(D)** 23.9 rad/s

Resposta: ☐

8. Um sistema não linear tem um centro no ponto P. Qual das afirmações seguintes, acerca da matriz jacobiana no ponto P, é verdadeira?

(A) o traço é positivo
(B) o determinante é negativo
(C) o determinante é nulo
(D) o traço é negativo
(E) o traço é nulo.

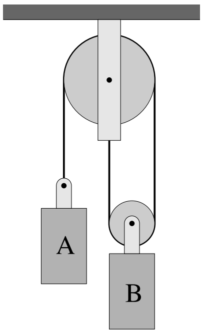
Resposta: ☐

9. A velocidade de um corredor pode aproximar-se de $v = 7.5\sqrt{1 - 0.03\,s}$, na qual v é expressa em km/h e a posição na trajetória, s, é expressa em km. Sabendo que $s = 0$ em $t = 0$, determine quantos quilómetros terá percorrido o corredor ao fim de três quartos de hora.

(A) 3.741 **(C)** 5.388 **(E)** 4.49
(B) 6.465 **(D)** 7.758

Resposta: ☐

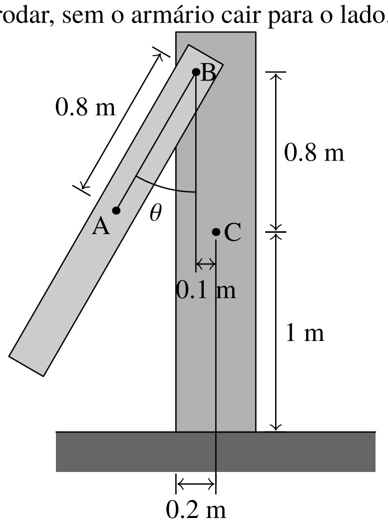
10. No instante em que o bloco A desce com velocidade 12 cm/s, com que velocidade sobe o bloco B?



(**A**) 12 cm/s (**C**) 6 cm/s (**E**) 36 cm/s
(**B**) 24 cm/s (**D**) 4 cm/s

Resposta: ☐

11. Um carpinteiro está a construir um armário formado por uma caixa vertical de 2 m de altura e massa de 15 kg, com centro de massa no ponto C indicado na figura. O armário tem uma barra com massa de 6 kg, ligado a um eixo horizontal no ponto B, 0.1 m à esquerda e 0.8 m por cima do ponto C, que lhe permite rodar um ângulo θ em relação à vertical. O centro de massa da barra é o ponto A. Determine o valor máximo do ângulo θ que a barra pode rodar, sem o armário cair para o lado.



(**A**) 73.4° (**C**) 38.7° (**E**) 48.6°
(**B**) 61.0° (**D**) 52.3°

Resposta: ☐

12. O espaço de fase dum sistema dinâmico é o plano xy. Em coordenadas polares, as equações de evolução são $\dot{\theta} = -3$, $\dot{r} = r^3 + 2\,r^2 + r$. Que tipo de ponto de equilíbrio é a origem?

(**A**) nó atrativo
(**B**) foco atrativo
(**C**) foco repulsivo
(**D**) ponto de sela
(**E**) nó repulsivo

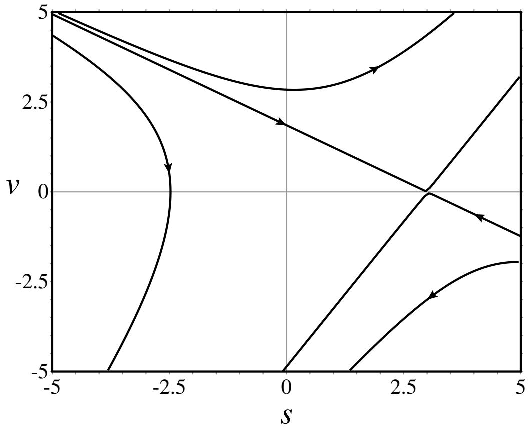
Resposta: ☐

13. Se $x \geq 0$ e $y \geq 0$, qual dos seguintes sistemas é um sistema de duas espécies com competição?

(**A**) $\dot{x} = x^2 - x\,y \quad \dot{y} = y^2 - x\,y$
(**B**) $\dot{x} = x\,y - x^2 \quad \dot{y} = y^2 - x^2$
(**C**) $\dot{x} = y^2 - x\,y \quad \dot{y} = x^2 + x\,y$
(**D**) $\dot{x} = y^2 - x\,y \quad \dot{y} = x^2 - x\,y$
(**E**) $\dot{x} = x^2 + x\,y \quad \dot{y} = y^2 + x\,y$

Resposta: ☐

14. A figura mostra o retrato de fase duma partícula, em que s é a posição na trajetória e v a velocidade. Existe um único ponto de equilíbrio em $s = 3$. Qual das seguintes afirmações é correta?



(**A**) Existem ciclos.
(**B**) Existe uma órbita heteroclínica.
(**C**) Existe uma órbita homoclínica.
(**D**) O ponto de equilíbrio é estável
(**E**) O ponto de equilíbrio é instável.

Resposta: ☐

15. Um corpo de 18 kg desloca-se ao longo do eixo dos x. A força resultante sobre o corpo é conservativa, com energia potencial dada pela expressão $1 + 7\,x^2$ (SI). Se o corpo passa pela origem com velocidade $8\,\hat{\imath}$, com que energia cinética chegará ao ponto $x = 5$ m?

(**A**) 2005.0 J (**C**) 3408.5 J (**E**) 401.0 J
(**B**) 1002.5 J (**D**) 120.3 J

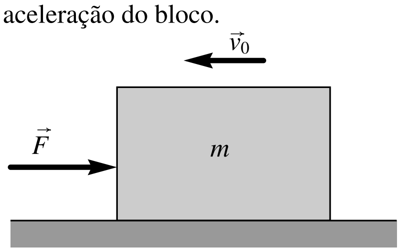
Resposta: ☐

16. Um sistema de pesos e roldanas, conservativo, tem um único grau de liberdade y. A energia cinética é dada pela expressão $5\,m\,\dot{y}^2$ e a energia potencial é: $U = -6\,m\,g\,y$, onde g é a aceleração da gravidade e m é um parâmetro com unidades de massa. Determine o valor da aceleração $\ddot{y}$.

(**A**) $\frac{6}{5}\,g$ (**C**) $\frac{12}{5}\,g$ (**E**) $\frac{3}{5}\,g$
(**B**) $\frac{18}{5}\,g$ (**D**) $\frac{2}{5}\,g$

Resposta: ☐

17. O bloco na figura, com massa igual a 6 kg, desloca-se para a esquerda, com velocidade inicial $\vec{v}_0$, sobre uma superfície horizontal. Sobre o bloco atua uma força externa $\vec{F}$, horizontal e constante, com módulo igual a 30 N. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície é igual a 0.25. Calcule o módulo da aceleração do bloco.



(**A**) 7.45 m/s^2 (**C**) 15.3 m/s^2 (**E**) 2.55 m/s^2
(**B**) 44.7 m/s^2 (**D**) 5.0 m/s^2

Resposta: ☐

Problema 1. (a) Como a esfera é homogénea, o seu centro é o centro de massa e:

$$v_{\text{cm}} = \dot{s} \qquad\qquad I_{\text{cm}} = \frac{2}{5}\,m\,r^2$$

A energia cinética da esfera é:

$$E_{\text{c}} = \frac{m}{2}\,\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\,m\,r^2\right)\omega^2$$

e como roda sem deslizar, a sua velocidade angular é $\omega = \dot{s}/r$ e, como tal,

$$E_{\text{c}} = \frac{m}{2}\,\dot{s}^2 + \frac{m\,r^2}{5}\left(\frac{\dot{s}}{r}\right)^2 = \frac{7}{10}\,m\,\dot{s}^2$$

A energia potencial gravítica é:

$$U = m\,g\,y = \frac{m\,g}{2}s^2$$

(b) A equação de movimento obtém-se aplicando a equação de Laplace para sistemas conservativos com um único grau de liberdade s:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_{\text{c}}}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial E_{\text{c}}}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial s} = \frac{7\,m}{5}\,\ddot{s} + m\,g\,s = 0 \quad\Longrightarrow\quad \ddot{s} = -\frac{5\,g}{7}\,s = -7\,s \quad \text{(SI)}$$

(c) As equações de evolução, em função das variáveis de estado s e v, são então,

$$\dot{s} = v \qquad \dot{v} = -7\,s$$

Que é um sistema linear, porque os lados direitos são combinações lineares das duas variáveis de estado, e a matriz do sistema é:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}$$

O traço nulo implica que os dois valores próprios diferem apenas no sinal: $\lambda_1 = -\lambda_2$. O produto dos valores próprios é igual ao determinante da matriz:

$$\lambda_1\,\lambda_2 = -\lambda_1^2 = 7 \quad\Longrightarrow\quad \lambda_{1,2} = \pm\mathrm{i}\sqrt{7}$$

Conclui-se então que o ponto de equilíbrio, $s = \dot{s} = 0$, é um centro.

(d) Todos os possíveis movimentos da esfera na calha são oscilações harmónicas com frequência angular $\Omega = \sqrt{7}$ Hz. Se a esfera parte do repouso em $s_0 \neq 0$, oscilará entre as posições s_0 e $-s_0$ na calha. Na realidade, a resistência do ar faz com que a cada oscilação os valores máximos e mínimos de s se aproximem de zero e a esfera acabará em repouso em $s = 0$.

(e) O período de oscilação, em segundos, é,

$$T = \frac{2\,\pi}{\Omega} = \frac{2\,\pi}{\sqrt{7}}$$

O tempo que demora a descer desde s_0 até $s = 0$ é a quarta parte do período:

$$t = \frac{\pi}{2\sqrt{7}} \approx 0.594 \text{ s}$$

2º método. O problema pode também ser resolvido usando a expressão da energia mecânica,

$$E_\text{m} = E_\text{c} + U = \frac{7}{10}\, m\, \dot{s}^2 + \frac{m\, g}{2} s^2$$

(b) Ignorando a resistência do ar, essa energia permanece constante e, como tal, a sua derivada em ordem ao tempo é nula:

$$\frac{\mathrm{d}\, E_\text{m}}{\mathrm{d}\, t} = \frac{7}{5}\, m\, \dot{s}\, \ddot{s} + m\, g\, s\, \dot{s} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \ddot{s} = -\frac{5\, g}{7}\, s$$

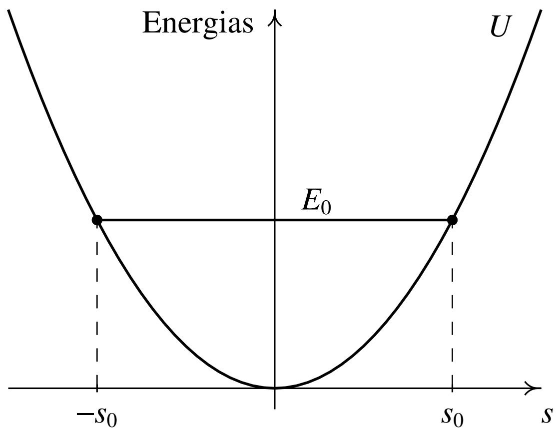
(usou-se o facto de que $\dot{s}$ deve ser contínua, ou seja, o resultado quando $\dot{s} = 0$ deve ser o mesmo que no limite $\dot{s} \to 0$).

(c) O sistema é linear porque a expressão para $\ddot{s}$ é combinação linear das variáveis de estado s e $\dot{s}$. Nos sistemas conservativos os mínimos locais da energia potencial são centros. Como U tem um mínimo local em $s = 0$, esse ponto de equilíbrio é um centro.

(d) A energia mecânica da esfera largada do repouso em s_0 é:

$$E_0 = \frac{m\, g}{2}\, s_0^2$$

O seguinte gráfico mostra a energia mecânica E_0 (segmento horizontal) e a energia potencial (parábola)



A esfera desloca-se no sentido negativo de s até chegar ao ponto $-s_0$, onde o movimento passa a ser no sentido positivo de s; quando a esfera regressa até o ponto s_0, o sentido do movimento muda novamente e repete-se o mesmo movimento indefinidamente: oscilação entre $-s_0$ e s_0.

(e) Em qualquer posição s, entre $-s_0$ e s_0, a energia mecânica é igual à energia inicial E_0

$$\frac{7}{10}\, m\, \dot{s}^2 + \frac{m\, g}{2} s^2 = \frac{m\, g}{2}\, s_0^2$$

Como tal, a expressão da velocidade em função da posição na trajetória é (unidades SI):

$$\dot{s} = \sqrt{7\left(s_0^2 - s^2\right)}$$

Separando variáveis e integrando s desde s_0 até 0, obtém-se o tempo pedido:

$$\sqrt{7} \int_0^t \mathrm{d}t = \int_{s_0}^{0} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{s_0^2 - s^2}} = \frac{\pi}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad t \approx 0.594\,\text{s}$$

3º método. Outra forma de resolver o problema consiste em observar que a energia cinética é igual à energia cinética de uma partícula pontual com massa $7\,m/5$. (*b*) A componente tangencial da força resultante nessa partícula é:

$$F_\text{t} = -\frac{\mathrm{d}\,U}{\mathrm{d}\,s} = -m\,g\,s$$

e a aceleração tangencial é então:

$$\ddot{s} = \frac{F_\text{t}}{\frac{7}{5}\,m} = -\frac{m\,g\,s}{\frac{7}{5}\,m} = -\frac{5\,g}{7}\,s$$

(*c*) Como a equação diferencial anterior é linear, corresponde a um sistema dinâmico linear. A aceleração tangencial também pode escrever-se assim (unidades SI):

$$v\,\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,s} = -7\,s$$

Separando variáveis e integrando desde a posição inicial s_0, onde $v_0 = 0$, até uma posição qualquer, com velocidade v, obtém-se a expressão da velocidade em função de s:

$$\int_0^v v\,\mathrm{d}v = -7\int_{s_0}^s s\,\mathrm{d}s \quad\Longrightarrow\quad v = \sqrt{7\left(s_0^2 - s^2\right)} = \frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t}$$

Separando variáveis novamente e integrando desde $t = 0$, na posição inicial s_0, até uma posição qualquer s no instante t,

$$\sqrt{7}\int_0^t \mathrm{d}t = \int_{s_0}^s \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{s_0^2 - s^2}} = \cos^{-1}\left(\frac{s}{s_0}\right) \quad\Longrightarrow\quad s = s_0\,\cos(\sqrt{7}\,t)$$

A posição s oscila entre $-s_0$ e s_0, ou seja, o ponto de equilíbrio é um centro.

(*d*) A expressão obtida para s em função do tempo mostra que a esfera oscila entre $-s_0$ e s_0.

(*e*) A frequência angular da função $s_0\,\cos(\sqrt{7}\,t)$ é $\sqrt{7}$. O tempo que a esfera demora desde s_0 até $s = 0$ é um quarto do período, ou seja,

$$t = \frac{1}{4}\left(\frac{2\,\pi}{\sqrt{7}}\right) \approx 0.594\,\text{s}$$

Comentários sobre o problema 1.

Este problema está relacionado com um problema famoso da mecânica clássica, proposto por Johann Bernoulli em 1696, chamado *problema da braquistócrona*, que consiste em encontrar a trajetória descrita por um corpo sujeito apenas à força da gravidade que vai dum ponto a outro com menor altura, no menor tempo possível.

A derivada de y em ordem ao tempo é $\dot{y} = s\,\dot{s}$. A equação $\dot{s}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ implica $\dot{x}^2 = \left(1 - s^2\right)\,\dot{s}^2$, que conduz à expressão de x em função de s:

$$x = \int\sqrt{1 - s^2}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\sin^{-1}(s) + \frac{s}{2}\sqrt{1 - s^2}$$

Substituindo o comprimento de arco s pelo parâmetro $\phi = \sin^{-1}(s)$, obtém-se a representação paramétrica mais habitual da cicloide:

$$x = \frac{\phi}{2} + \frac{\sin(2\,\phi)}{4} \qquad\qquad y = \frac{1 - \cos(2\,\phi)}{4}$$

Problema 2. (a) O vetor posição dos pontos no plano xy é $x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}$. Em particular, nos pontos da trajetória, $x = t$, $y = \cos(t)$ e o vetor posição é:

$$\vec{r} = t\,\hat{\imath} + \cos(t)\,\hat{\jmath}$$

Os vetores velocidade e aceleração são:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t} = \hat{\imath} - \sin(t)\,\hat{\jmath}$$
$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}\,t} = -\cos(t)\,\hat{\jmath}$$

(b) A expressão do valor da velocidade é,

$$v = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{1 + \sin^2(t)}$$

e a aceleração tangencial é

$$a_\mathrm{t} = \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\sin(t)\,\cos(t)}{\sqrt{1 + \sin^2(t)}}$$

(c) A aceleração normal é

$$a_\mathrm{n} = \sqrt{a^2 - a_\mathrm{t}^2} = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a} - a_\mathrm{t}^2} = \sqrt{\cos^2(t) - \frac{\sin^2(t)\,\cos^2(t)}{1 + \sin^2(t)}} = \sqrt{\frac{\cos^2(t)}{1 + \sin^2(t)}} = \frac{|\cos(t)|}{\sqrt{1 + \sin^2(t)}}$$

(d) O raio de curvatura é

$$R = \frac{v^2}{a_\mathrm{n}} = \left(1 + \sin^2(t)\right)\left(\frac{\sqrt{1 + \sin^2(t)}}{|\cos(t)|}\right)$$

Simplificando e substituindo t por x, obtém-se a expressão do raio de curvatura da função $\cos(x)$

$$R = \frac{\left(1 + \sin^2(x)\right)^{3/2}}{|\cos(x)|}$$

Perguntas

3. A **6.** D **9.** C **12.** C **15.** E

4. E **7.** B **10.** C **13.** A **16.** E

5. E **8.** E **11.** E **14.** E **17.** A

Cotações

Problema 1

- Alínea *a* ________________________________ 0.8
- Alínea *b* ________________________________ 0.8
- Alínea *c* ________________________________ 0.8
- Alínea *d* ________________________________ 0.8
- Alínea *e* ________________________________ 0.8

Problema 2

- Alínea *a* ________________________________ 1.2
- Alínea *b* ________________________________ 0.8
- Alínea *c* ________________________________ 0.8
- Alínea *d* ________________________________ 1.2